



## 第6章 二次函数

### 6.1 二次函数的概念

#### 刷基础

1. **B** 【解析】①函数  $y = (x-1)^2 - x^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 - x^2 + 1 = -2x + 2$  不是二次函数；②函数  $y = -2x^2 - 1$  是二次函数；③函数  $y = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + x - 1$  不是二次函数；④函数  $y = 2x^2 - x - 1$  是二次函数；⑤当  $a = 0$  时，函数  $y = ax^2 + bx + c$  不是二次函数；⑥函数  $y = 3x^3 - 2x^2$  不是二次函数。综上，二次函数有②④，共 2 个。故选 B。

2. **B** 【解析】二次函数  $y = 2x^2 - 3x$  的二次项系数是 2，一次项系数是 -3，常数项是 0。故选 B。

3. 【解】乙的说法正确。理由： $\because a^2 + 2a + 5 = (a+1)^2 + 4 > 0$ ， $\therefore$  此函数一定是二次函数， $\therefore$  乙的说法正确。

4. **B** 【解析】养鸡场的宽为  $x$  m，则养鸡场的长为  $(30+2-2x)$  m，所以养鸡场的面积  $S = x(30+2-2x)$ ，即  $S = x(32-2x)$ 。故选 B。

5. **A** 【解析】售价上涨  $x$  元后，每个商品的利润为  $(40+x) - 30 = (x+10)$  元，销售量减少  $6x$  个，则每天的销售量为  $(200-6x)$  个， $\therefore$  每天获得的利润  $y = (x+10)(200-6x)$ 。故选 A。

6. **C** 【解析】由题知小南本周五跳绳量为  $500(1-50\%)$  个。 $\because$  日均增长率为  $x$ ， $\therefore$  小南本周日的跳绳量  $y$  关于  $x$  的函数表达式为  $y = 500(1-50\%)(1+x)^2$ 。故选 C。

7.  $y = 4x^2 - 96x + 572 (0 < x < 11)$  【解析】根据题意，得  $y = (26-2x)(22-2x) = 572 - 52x - 44x + 4x^2 = 4x^2 - 96x + 572$ ，且  $\begin{cases} x > 0, \\ 22-2x > 0, \end{cases}$  解得  $0 < x < 11$ ， $\therefore y$  与  $x$  之间的函数关系式为  $y = 4x^2 - 96x + 572 (0 < x < 11)$ 。故答案为  $y = 4x^2 - 96x + 572 (0 < x < 11)$ 。

#### 刷易错

8. -3 【解析】 $\because$  函数  $y = (m-3)x^{m^2-7} + 2024x - 2025$  是关于  $x$  的二次函数， $\therefore m^2 - 7 = 2$  且  $m - 3 \neq 0$ ，解得  $m = -3$ 。故答案为 -3。

#### 易错警示

注意在找二次项系数、一次项系数和常数项时，不要漏掉符号。

#### 关键点拨

弄清楚数量关系是列出表达式的关键。

#### 易错警示

求出参数的值后，注意要确保二次项系数不为零。

### 6.2 二次函数的图象与性质

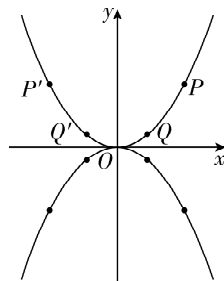
课时 1 二次函数  $y = x^2$  的图象与性质+

课时 2 二次函数  $y = ax^2$  的图象与性质

#### 刷基础

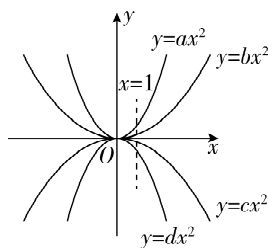
1. 【解】(1) $\because$  点  $P$  在函数  $y = x^2$  的图象上， $\therefore$  当  $x = 1$  时， $y = 1$ ， $\therefore$  点  $P$  的纵坐标为 1， $\therefore P(1, 1)$ 。 $\because$  点  $P, P'$  关于  $y$  轴对称， $\therefore P'(-1, 1)$ 。 $\because$  点  $Q'$  在函数  $y = x^2$  的图象上，点  $Q, Q'$  关于  $y$  轴对称， $\therefore$  当  $y = \frac{1}{4}$  时， $x^2 = \frac{1}{4}$ ，解得  $x = \pm \frac{1}{2}$ ， $\therefore Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), Q'\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ ，点  $Q$  的横坐标为  $\frac{1}{2}$ 。

(2) 函数  $y = -x^2$  和  $y = x^2$  的图象关于  $x$  轴对称，分别作出点  $P, Q, P', Q'$  关于  $x$  轴对称的点，画出二次函数  $y = -x^2$  的图象如图所示。



2. **A** 【解析】函数  $y = 3x^2$  的图象是一条开口向上、对称轴为  $y$  轴、顶点是原点的曲线。故选 A。

3.  $a > b > c > d$  【解析】假设直线  $x = 1$  的位置如图，该直线与四条抛物线的交点坐标从上到下依次为  $(1, a), (1, b), (1, c), (1, d)$ ， $\therefore a > b > c > d$ 。故答案为  $a > b > c > d$ 。



4. **D** 【解析】 $\because y=4x^2$  是二次函数, 且  $a=4>0$ ,  $\therefore$  函数图象开口向上, 顶点为  $(0,0)$ , 对称轴为  $y$  轴. A 选项, 当  $x=0$  时,  $y=0$ , 不是正数, 故 A 错误. B 选项, 图象经过原点, 原点不属于任何象限, 故 B 错误. C 选项, 当  $x<0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小; 当  $x>0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大, 故 C 错误. D 选项, 函数  $y=4x^2$  的图象关于  $y$  轴对称, 故 D 正确. 故选 D.

5. **C** 【解析】 $\because$  点  $(-1, y_1)$  在二次函数  $y=x^2$  的图象上,  $\therefore y_1=(-1)^2=1$ , 同理可得,  $y_2=0^2=0$ ,  $y_3=3^2=9$ .  $\because 0<1<9$ ,  $\therefore y_2<y_1<y_3$ . 故选 C.

6. **0** (答案不唯一) 【解析】 $\because$  抛物线开口向下,  $\therefore m-5<0$ , 解得  $m<5$ ,  $\therefore m$  的值可以是 0. 故答案为 0 (答案不唯一, 填小于 5 的实数均可).

7. **0** 【解析】二次函数  $y=2025x^2$  的图象的对称轴为  $y$  轴.  $\because$  点  $P(t_1, \frac{1}{2})$ ,  $Q(t_2, \frac{1}{2})$  的纵坐标相等,  $\therefore$  点  $P, Q$  关于  $y$  轴对称,  $\therefore t_1+t_2=0$ . 故答案为 0.

8. 【解】(1)  $\because$  函数  $y=(k+2)x^{k^2-7}$  是关于  $x$  的二次函数,  $\therefore \begin{cases} k^2-7=2, \\ k+2 \neq 0, \end{cases} \therefore k=\pm 3$ .  
 $\because$  函数图象有最低点,  $\therefore k+2>0$ ,  
 $\therefore k>-2$ ,  $\therefore k=3$ .  
 (2) 由 (1) 得函数表达式为  $y=5x^2$ .  
 当  $x=-\sqrt{3}$  时,  $y=5 \times (-\sqrt{3})^2=15$ ,  
 $\therefore$  点  $P(-\sqrt{3}, 6)$  不在 (1) 中的函数图象上.

**刷易错** .....

9. **16** **0** 【解析】当  $-2 \leq x \leq 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小, 此时  $y_{\text{最大}}=(-2)^2=4$ ,  $y_{\text{最小}}=0$ .  
 当  $0 \leq x \leq 4$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大, 此时  $y_{\text{最大}}=4^2=16$ ,  $y_{\text{最小}}=0$ . 综上所述, 在  $-2 \leq x \leq 4$  这个范围内, 函数有最大值 16, 最小值 0. 故答案为 16, 0.

**刷提升** .....

1. **B** 【解析】当  $a>0$  时, 函数  $y=ax^2$  的图象开口向上, 函数  $y=ax+a$  的图象经过第一、二、三象限; 当  $a<0$  时, 函数  $y=ax^2$  的图象开口向下, 函数  $y=ax+a$  的图象经过第二、三、四象限, 所以 B 正确.

2. **C** 【解析】 $\because$  直线  $y=2$  分别交抛物线  $y=x^2(x \geq 0)$ ,  $y=ax^2(x \geq 0)$  于点  $A, B$ ,  $\therefore A, B$  的纵坐标均为 2. 当  $y=x^2=2$  时, 解得  $x=\pm\sqrt{2}$ ,  $\therefore A(\sqrt{2}, 2)$ .  $\because AB=1$ ,  $\therefore B(\sqrt{2}+1, 2)$ . 把

**易错警示**

代入坐标求出临界值后, 在写范围时混淆大小关系; 忽略  $a<0$  时抛物线开口向下, 与线段  $MN$  必无交点的情况, 导致漏解.

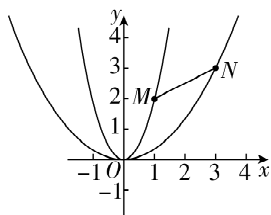
$B(\sqrt{2}+1, 2)$  代入  $y=ax^2(x \geq 0)$ , 得  $2=a(\sqrt{2}+1)^2$ , 解得  $a=6-4\sqrt{2}$ . 故选 C.

3. **C** 【解析】 $\because y=x^2, 1>0$ ,  $\therefore$  该函数图象的对称轴为  $y$  轴, 开口向上,  $\therefore$  当  $x<0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小; 当  $x>0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大. A 选项, 当  $x_1>x_2$  时,  $y_1$  不一定大于  $y_2$ , 例如当  $x_1=1$  时,  $y_1=1$ , 当  $x_2=-2$  时,  $y_2=4$ , 此时  $x_1>x_2$ , 但是  $y_1<y_2$ , 故选项 A 错误. B 选项, 当  $x_1<x_2$  时,  $y_1$  不一定小于  $y_2$ , 例如当  $x_1=-2$  时,  $y_1=4$ , 当  $x_2=1$  时,  $y_2=1$ , 此时  $x_1<x_2$ , 但是  $y_1>y_2$ , 故选项 B 错误. C 选项,  $\because x_1x_2>x_2^2$ ,  $\therefore (x_1-x_2) \cdot x_2>0$ ,  $\therefore x_1<x_2<0$  或  $x_1>x_2>0$ . 当  $x_1<x_2<0$  时,  $y_1>y_2$ ; 当  $x_1>x_2>0$  时,  $y_1>y_2$ ,  $\therefore$  当  $x_1x_2>x_2^2$  时,  $y_1>y_2$ , 故选项 C 正确. D 选项, 当  $x_1x_2<x_2^2$  时,  $y_1$  不一定小于  $y_2$ , 例如当  $x_1=-2$  时,  $y_1=4$ , 当  $x_2=1$  时,  $y_2=1$ , 此时  $x_1x_2=-2<x_2^2=1$ , 但是  $y_1>y_2$ , 故选项 D 错误. 故选 C.

4.  $a<0$  或  $0<a<\frac{1}{3}$  或  $a>2$  【解析】当  $a>0$  时, 把点  $M(1, 2)$  代入  $y=ax^2$ , 得  $a=2$ ; 把点  $N(3, 3)$

代入  $y=ax^2$ , 得  $a=\frac{1}{3}$ .

如图,  $\because$  抛物线  $y=ax^2(a>0)$  与线段  $MN$  没有公共点,  $\therefore a$  的取值



范围为  $0<a<\frac{1}{3}$  或  $a>2$ . 当  $a<0$  时, 抛物线开口向下, 与线段  $MN$  没有公共点. 综上,  $a$  的取值范围是  $a<0$  或  $0<a<\frac{1}{3}$  或  $a>2$ . 故答案为  $a<0$  或  $0<a<\frac{1}{3}$  或  $a>2$ .

5. **2** 【解析】 $\because A(0, 1), AC \parallel x$  轴,  $\therefore$  点  $A, C$  的纵坐标相同,  $\therefore 1=\frac{1}{4}x^2$ , 解得  $x=2$  (负值已舍去),  $\therefore$  点  $C$  的坐标为  $(2, 1)$ .  $\because CD \parallel y$  轴,  $\therefore$  点  $D$  的横坐标与点  $C$  的横坐标相同, 为 2,  $\therefore$  点  $D$  的纵坐标为  $2^2=4$ ,  $\therefore$  点  $D$  的坐标为  $(2, 4)$ .  $\because DE \parallel x$  轴,  $\therefore$  点  $E$  的纵坐标与点  $D$  的纵坐标相同, 为 4,  $\therefore 4=\frac{1}{4}x^2$ , 解得  $x=4$  (负值已舍去),  $\therefore$  点  $E$  的坐标为  $(4, 4)$ ,  $\therefore DE=4-2=2$ . 故答案为 2.

6.  $4\sqrt{2}n$  【解析】 $\because$  四边形  $B_0A_1B_1C_1$  是正方形,  $\therefore \angle B_0A_1B_1=90^\circ, B_0A_1=A_1B_1$ ,  $\therefore \triangle B_0A_1B_1$  是

等腰直角三角形. 设  $\triangle B_0A_1B_1$  的直角边长为  $m$ , 则  $A_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}m, \frac{\sqrt{2}}{2}m\right)$ . 将  $A_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}m, \frac{\sqrt{2}}{2}m\right)$  代入抛物线的表达式  $y=x^2$ , 得  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}m\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}m$ , 解得  $m_1=0$  (舍去),  $m_2=\sqrt{2}$ , 故  $\triangle B_0A_1B_1$  的直角边长为  $\sqrt{2}$ . 同理可求得等腰直角  $\triangle B_1A_2B_2$  的直角边长为  $2\sqrt{2}$ ,  $\dots$ , 依次类推, 等腰直角  $\triangle B_{n-1}A_nB_n$  的直角边长为  $\sqrt{2}n$ , 故正方形  $B_{n-1}A_nB_nC_n$  的周长为  $4\sqrt{2}n$ . 故答案为  $4\sqrt{2}n$ .

**刷素养**

7. 【解】(1) 令  $y=a(x+2)=0$ , 得  $x=-2$ , 故  $A$  点的坐标为  $(-2, 0)$ .

(2) 联立直线  $l: y=a(x+2)$  与抛物线  $E: y=ax^2$

得  $\begin{cases} y=a(x+2), \\ y=ax^2, \end{cases} \therefore x^2-x-2=0, \therefore x=-1$  或  $x=2$ ,  $\therefore B(-1, a), C(2, 4a)$ .

$\therefore B$  点关于  $x$  轴的对称点为  $B'$  点,  $\therefore B'(-1, -a)$ ,  $\therefore AB'^2=(-2+1)^2+(0+a)^2=a^2+1, AC^2=(2+2)^2+(4a-0)^2=16a^2+16, B'C^2=(2+1)^2+(4a+a)^2=25a^2+9$ .

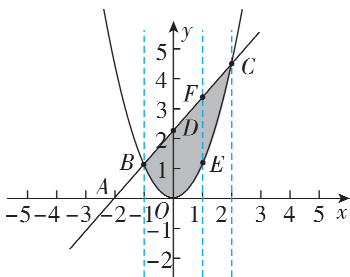
若  $\angle CAB'=90^\circ$ , 则  $AB'^2+AC^2=B'C^2$ , 即  $a^2+1+16a^2+16=25a^2+9$ , 解得  $a=1$  (负值已舍去);

若  $\angle AB'C=90^\circ$ , 则  $AB'^2+B'C^2=AC^2$ , 即  $a^2+1+25a^2+9=16a^2+16$ , 解得  $a=\frac{\sqrt{15}}{5}$  (负值已舍去);

若  $\angle ACB'=90^\circ$ , 则  $AC^2+B'C^2=AB'^2$ , 即  $16a^2+16+25a^2+9=a^2+1$ , 此方程无实数解.

$\therefore a=1$  或  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ .

(3) 如图, 直线  $l$  与抛物线  $E$  所围成的封闭图形 (即阴影部分, 不包含边界) 内的整点只能落在  $y$  轴和直线  $x=1$  上.



$\therefore D(0, 2a), E(1, a), F(1, 3a), \therefore OD=EF=2a$ .  $\therefore$  整点数恰好是 26 个,  $\therefore$  落在  $y$  轴和直线  $x=1$  上的整点数应各为 13 个. 由落在  $y$  轴

**思路分析**

(2) 用含  $a$  的式子表示出  $AB'^2, B'C^2, AC^2$ , 利用勾股定理列方程并求解, 因为直角顶点不确定, 所以需分类讨论.

**归纳总结**

函数图象的平移遵循“左加右减自变量, 上加下减常数项”这一规律.

的整点有 13 个得  $13 < 2a \leq 14$ , 即  $\frac{13}{2} < a \leq 7$ .

① 若  $\frac{13}{2} < a < 7$ , 则  $\frac{13}{2} < y_E < 7, \therefore$  线段  $EF$  上的整点应该为  $(1, 7), (1, 8), \dots, (1, 19), \therefore 19 < 3a \leq 20, \therefore \frac{19}{3} < a \leq \frac{20}{3}, \therefore \frac{13}{2} < a \leq \frac{20}{3}$ ;

② 若  $a=7$ , 则  $y_E=7, y_F=21, \therefore$  线段  $EF$  上的整点正好有 13 个.

综上,  $\frac{13}{2} < a \leq \frac{20}{3}$  或  $a=7$ .

**课时 3 二次函数  $y=ax^2+c$  的图象与性质**

**刷基础**

1. 上 【解析】 $\therefore$  原抛物线为  $y=x^2$ , 平移后的抛物线为  $y=x^2+4, \therefore$  根据“上加下减”的平移规律可得, 将抛物线  $y=x^2$  向上平移 4 个单位长度得到抛物线  $y=x^2+4$ . 故答案为上.

2.  $y=-5x^2-3$  【解析】将抛物线  $y=-5x^2+1$  向下平移 4 个单位长度, 所得抛物线的表达式为  $y=-5x^2+1-4$ , 即  $y=-5x^2-3$ . 故答案为  $y=-5x^2-3$ .

3. 【解】能. 设平移后的图象对应的函数表达式为  $y=\frac{1}{3}x^2+k$ . 把  $(3, -3)$  代入, 得  $-3=\frac{1}{3} \times 3^2+k$ , 解得  $k=-6, \therefore$  把二次函数  $y=\frac{1}{3}x^2$  的图象向下平移 6 个单位长度, 得到的新图象过点  $(3, -3)$ .

4. D 【解析】 $\therefore$  二次函数  $y=kx^2$  的图象开口向下,  $\therefore k < 0, \therefore -k > 0, \therefore$  二次函数  $y=kx^2-k$  的图象开口向下, 与  $y$  轴交于正半轴, 故选项 D 符合题意, 故选 D.

5. C 【解析】抛物线  $y=\frac{1}{2}x^2+1$  和  $y=-\frac{1}{2}x^2-1$  的对称轴都是  $y$  轴,  $\therefore$  ① 正确.  $\therefore \left|\frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right|, \therefore$  两条抛物线开口大小相同,  $\therefore$  ② 正确. 抛物线  $y=\frac{1}{2}x^2+1$  的顶点坐标为  $(0, 1)$ , 抛物线  $y=-\frac{1}{2}x^2-1$  的顶点坐标为  $(0, -1), \therefore$  ③ 错误. 综上, 正确的有 2 个, 故选 C.

6. B 【解析】 $\therefore -2 < 0, \therefore$  该函数图象开口向下, 故 A 选项错误, 不符合题意.  $\therefore$  抛物线  $y=-2x^2+4$  的对称轴为直线  $x=0, \therefore$  当  $x > 0$  时,  $y$

随  $x$  的增大而减小,当  $x < 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大,当  $x = 0$  时,  $y$  取得最大值 4,故 B 选项正确,符合题意, C 选项错误,不符合题意.  
 $\because 0 - (-2) > 1 - 0, x = -2$  时,  $y = -4, \therefore$  当  $-2 < x \leq 1$  时,  $y$  的取值范围是  $-4 < y \leq 4$ ,故 D 选项错误,不符合题意. 故选 B.

7.  $y = x^2 + 2$  (答案不唯一) 【解析】 $\because$  函数图象的顶点坐标为  $(0, 2), \therefore$  该函数的表达式为  $y = ax^2 + 2 (a \neq 0)$ . 又  $\because x < 0$  时,  $y$  随着  $x$  的增大而减小,  $\therefore a > 0, \therefore$  这个二次函数的表达式可以为  $y = x^2 + 2$ ,故答案为  $y = x^2 + 2$  (答案不唯一).

8.  $y_3 < y_2 < y_1$  【解析】 $\because$  二次函数  $y = x^2 + k$  的图象开口向上,对称轴为  $y$  轴,  $\therefore$  当  $x > 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大.  $\because A(-4, y_1)$  与点  $(4, y_1)$  关于  $y$  轴对称,且  $1 < 2 < 4, \therefore y_3 < y_2 < y_1$ ,故答案为  $y_3 < y_2 < y_1$ .

9. 3 【解析】由题意,得点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  关于抛物线  $y = 2x^2 + 3$  的对称轴对称.  $\because$  对称轴为直线  $x = 0, \therefore x_1 + x_2 = 2 \times 0 = 0$ . 将  $x = 0$  代入  $y = 2x^2 + 3$ ,得  $y = 2 \times 0^2 + 3 = 3$ . 故答案为 3.

10. 【解】(1) 根据题意可得  $A(0, k)$ , 点  $B, C$  关于  $y$  轴对称. 将  $y = k$  代入  $y_2 = \frac{1}{3}x^2$ , 得  $\frac{1}{3}x^2 = k$ , 解得  $x = \pm\sqrt{3k}$ ,  
 $\therefore BC = \sqrt{3k} - (-\sqrt{3k}) = 6$ , 解得  $k = 3$ .  
 (2) 由题意得, 当  $x = -2$  时,  $y_1 = -1$ ; 当  $x = 0$  时,  $y_1 = 3, \therefore \begin{cases} a(-2)^2 + k = -1, \\ k = 3, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} a = -1, \\ k = 3, \end{cases}$   
 $\therefore a$  的值为  $-1$ .

**刷易错** .....

11. 【解】 $\because$  抛物线  $y = ax^2$  与抛物线  $y = -\frac{2}{3}x^2 + c$  的形状完全相同, 且经过平移两抛物线能够完全重合,  $\therefore a = -\frac{2}{3}, \therefore y = -\frac{2}{3}x^2$ .  
 又  $\because$  抛物线  $y = -\frac{2}{3}x^2$  的对称轴为  $y$  轴, 且抛物线  $y = -\frac{2}{3}x^2$  沿对称轴平移 2 个单位长度后就能与抛物线  $y = -\frac{2}{3}x^2 + c$  完全重合,  
 $\therefore$  平移后的抛物线的表达式为  $y = -\frac{2}{3}x^2 \pm 2$ ,  
 $\therefore$  这两个抛物线的表达式为  $y = -\frac{2}{3}x^2$  和  $y = -\frac{2}{3}x^2 \pm 2$ .

**关键点拨**

抛物线  $y = 2x^2 + c$  的顶点为  $(0, c)$ , 所以  $c$  的变化会使得抛物线沿着  $y$  轴上下移动, 结合图象找到临界状态即可确定  $c$  的范围.

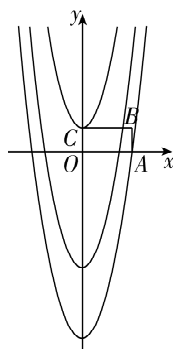
**易错警示**

本题在求常数项  $c$  时, 在只知道平移的单位长度而没有确定平移的方向时, 易因没有全面考虑各种情况而出错.

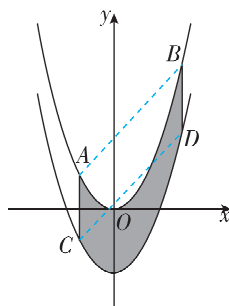
**刷提升** .....

1. C 【解析】选项 A, 二次函数的图象与  $y$  轴交于负半轴, 图象开口向上, 则  $a < 0, b > 0$ ; 一次函数的图象过第一、二、三象限, 则  $a > 0, b > 0$ , 不符合题意. 选项 B, 二次函数的图象与  $y$  轴交于正半轴, 图象开口向下, 则  $a > 0, b < 0$ ; 一次函数的图象过第一、二、三象限, 则  $a > 0, b > 0$ , 不符合题意. 选项 C, 二次函数的图象与  $y$  轴交于负半轴, 图象开口向上, 则  $a < 0, b > 0$ ; 一次函数的图象过第一、二、四象限, 则  $a < 0, b > 0$ , 符合题意. 选项 D, 二次函数的图象与  $y$  轴交于负半轴, 图象开口向上, 则  $a < 0, b > 0$ ; 一次函数的图象过第二、三、四象限, 则  $a < 0, b < 0$ , 不符合题意. 故选 C.

2. D 【解析】如图所示, 由题意得  $C(0, 1), A(2, 0)$ , 当抛物线经过  $C$  点时, 抛物线与矩形边界只有一个公共点, 将  $C(0, 1)$  代入  $y = 2x^2 + c$  得  $c = 1$ . 当抛物线经过  $A$  点时, 抛物线与矩形边界只有一个公共点, 将  $A(2, 0)$  代入  $y = 2x^2 + c$  得  $8 + c = 0$ , 解得  $c = -8$ . 由图象得当  $-8 < c < 1$  时, 抛物线与矩形边界会有两个公共点. 故选 D.



(第 2 题图)



(第 3 题图)

3. 24 【解析】如图, 连接  $AB, CD$ .  $\because$  点  $A, C$  的横坐标均为  $-2$ , 点  $B, D$  的横坐标均为  $4, \therefore BD \parallel AC \parallel y$  轴. 又  $\because$  上面的抛物线  $y = \frac{1}{2}x^2$  向下平移 4 个单位长度可得下面的抛物线  $y = \frac{1}{2}x^2 - 4, \therefore AC = BD = 4, \therefore$  四边形  $ACDB$  为平行四边形. 由平移可得, 阴影部分的面积 = 平行四边形  $ACDB$  的面积 =  $AC \cdot |x_B - x_A| = 4 \times (4 + 2) = 24$ . 故答案为 24.

4.  $\frac{2}{5}$  【解析】把  $y = 0$  代入  $y = -\frac{4}{5}x^2 + 1$  得  $0 = -\frac{4}{5}x^2 + 1$ , 解得  $x_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}, x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}, \therefore$  两抛物线

课时4 二次函数  $y=a(x-h)^2$  的图象与性质



刷基础

1. **D** 【解析】抛物线  $y=3x^2$  的顶点坐标为  $(0,0)$ , 抛物线  $y=3(x-1)^2$  的顶点坐标为  $(1,0)$ .  $\therefore$  从  $(0,0)$  到  $(1,0)$  是横坐标增加1, 纵坐标保持不变,  $\therefore$  平移方式是向右平移1个单位长度. 故选 D.

2.  $y=2(x+3)^2$  【解析】抛物线  $y=2x^2$  向左平移3个单位长度所得抛物线的表达式为  $y=2(x+3)^2$ . 故答案为  $y=2(x+3)^2$ .

3. **D** 【解析】 $\because$  抛物线的开口向下,  $\therefore a-5<0$ , 解得  $a<5$ , 观察四个选项, 选项 D 符合题意. 故选 D.

4. **D** 【解析】 $\because$  抛物线的形状与函数  $y=\frac{1}{2}x^2$  的图象相同,  $\therefore$  抛物线表达式的二次项系数为  $\pm\frac{1}{2}$ .  $\because$  开口向下,  $\therefore$  二次项系数为  $-\frac{1}{2}$ , 故 A, B 错误. C 选项对应抛物线的顶点为  $(6,0)$ , D 选项对应抛物线的顶点为  $(-6,0)$ , 故 D 正确.

5.  $\leq$  【解析】函数  $y=a(x-1)^2$  ( $a<0$ ) 的图象开口向下, 对称轴为直线  $x=1$ ,  $\therefore$  当  $x<1$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大.  $\because -5<-3$ ,  $\therefore y_1<y_2$ . 故答案为  $<$ .

6. 18 【解析】 $\because x=4$  时的函数值与  $x=2$  时的函数值相等,  $\therefore$  抛物线的对称轴为直线  $x=3$ , 则  $m=3$ ,  $\therefore$  抛物线的表达式为  $y=2(x-3)^2$ ,  $\therefore$  当  $x=6$  时, 函数值为  $y=2\times(6-3)^2=18$ . 故答案为 18.

7. 6 【解析】令  $y=0$ , 得  $\frac{4}{9}(x-3)^2=0$ ,  $\therefore x=3$ ,  $\therefore$  点 A 的坐标为  $(3,0)$ . 令  $x=0$ , 得  $y=\frac{4}{9}\times(0-3)^2=4$ ,  $\therefore$  点 B 的坐标为  $(0,4)$ .  $\therefore$  点 A 的坐标为  $(3,0)$ , 点 B 的坐标为  $(0,4)$ ,  $\therefore OA=3, OB=4$ ,  $\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{OA \cdot OB}{2}=\frac{3 \times 4}{2}=6$ .

8.  $y=-2(x-1)^2$  (答案不唯一) 【解析】根据 A 的描述可设二次函数表达式为  $y=a(x-h)^2$ , 根据 C 的描述可知  $|a|=|-2|=2$ , 再结合 B 的描述可得出  $h \leq 1$ , 且  $a=-2$ , 所以满足上述所有性质的二次函数表达式可以是  $y=-2(x-1)^2$ , 故答案为  $y=-2(x-1)^2$  (答案不唯一).

9. 【解】(1) 由条件可得  $m=2 \times 1 - 1 = 1$ , 则  $P(1,$

的交点坐标为  $(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0), (-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$ . 把  $(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$  代入  $y=kx^2-2$ , 得  $0=\frac{5}{4}k-2$ , 解得  $k=\frac{8}{5}$ ,  $\therefore y=\frac{8}{5}x^2-2$ . 抛物线  $y=-\frac{4}{5}x^2+1$  向下平移  $\frac{1}{5}$  个单位长度后得到抛物线的表达式为  $y=-\frac{4}{5}x^2+\frac{4}{5}$ . 把  $y=0$  代入  $y=-\frac{4}{5}x^2+\frac{4}{5}$ , 得  $0=-\frac{4}{5}x^2+\frac{4}{5}$ , 解得  $x=\pm 1$ ,  $\therefore$  抛物线  $y=-\frac{4}{5}x^2+\frac{4}{5}$  与  $x$  轴的交点为  $(1,0), (-1,0)$ . 把  $x=1$  代入  $y=\frac{8}{5}x^2-2$ , 得  $y=-\frac{2}{5}$ ,  $\therefore$  抛物线  $y=\frac{8}{5}x^2-2$  经过点  $(1, -\frac{2}{5})$ ,  $\therefore$  把抛物线  $y=\frac{8}{5}x^2-2$  向上平移  $\frac{2}{5}$  个单位长度后两条抛物线的交点还在  $x$  轴上. 故答案为  $\frac{2}{5}$ .

思路分析

将  $y=0$  代入  $y=-\frac{4}{5}x^2+1$ , 求出抛物线与  $x$  轴的交点坐标, 从而可得抛物线  $y=kx^2-2$  的表达式, 然后求出将抛物线  $y=-\frac{4}{5}x^2+1$  向下平移  $\frac{1}{5}$

个单位长度后与  $x$  轴的交点坐标为  $(1,0), (-1,0)$ . 将  $x=1$  代入另一个抛物线的表达式可得抛物线在平移之前经过点  $(1, -\frac{2}{5})$ , 进而可求解.

关键点拨

利用二次函数的图象与性质, 结合菱形与矩形的判定作图.

5. 【解】(1)  $\because$  抛物线  $y=2x^2+n$  与直线  $y=2x-1$  交于  $M(m,3)$ ,  $\therefore$  将  $M(m,3)$  代入  $y=2x-1$  得  $3=2m-1$ , 解得  $m=2$ . 将  $M(2,3)$  代入  $y=2x^2+n$  得  $3=8+n$ , 解得  $n=-5$ .

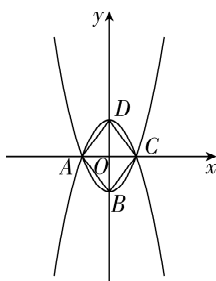
(2) 根据(1)得出  $y=2x^2-5$ ,  $\therefore$  抛物线  $y=2x^2+n$  的顶点坐标为  $(0,-5)$ , 对称轴为  $y$  轴 (或直线  $x=0$ ).

(3)  $\because$  抛物线开口向上, 对称轴为  $y$  轴,  $\therefore$  当  $x<0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小.

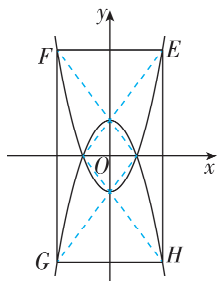
(4) 抛物线  $y=2x^2+n$  与直线  $y=2x-1$  还有其他交点. 令  $2x-1=2x^2-5$ , 解得  $x_1=-1, x_2=2$ , 当  $x=-1$  时,  $y=2 \times (-1) - 1 = -3$ , 故抛物线  $y=2x^2+n$  与直线  $y=2x-1$  还有其他交点, 交点坐标为  $(-1,-3)$ .

刷素养

6. 【解】(1) 如图(1), 菱形 ABCD 即为所作.



图(1)



图(2)

(2) 如图(2), 矩形 EFGH 即为所作.



1). 把  $P(1,1)$  代入  $y=a(x+1)^2$ , 得  $1=a \times (1+1)^2$ , 解得  $a=\frac{1}{4}$ .

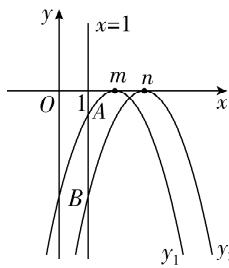
(2) 由(1)得  $a=\frac{1}{4}$ , 则  $y=\frac{1}{4}(x+1)^2$ ,  $\therefore$  顶点坐标为  $(-1,0)$ , 对称轴为直线  $x=-1$ .

(3)  $x<-3$  或  $x>1$ . 令  $y=1$ , 则  $1=\frac{1}{4}(x+1)^2$ ,  $\therefore (x+1)^2=4$ , 解得  $x_1=-3, x_2=1$ .

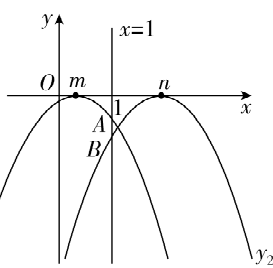
$\therefore$  抛物线  $y=\frac{1}{4}(x+1)^2$  的开口向上,  $\therefore$  当  $y>1$  时,  $x$  的取值范围为  $x<-3$  或  $x>1$ .

### 刷提升

1. C 【解析】如图(1), 若  $1<m<n$ , 则  $a_1>a_2$ , 故 A 选项错误.

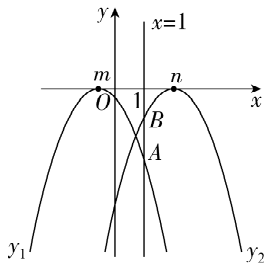


图(1)

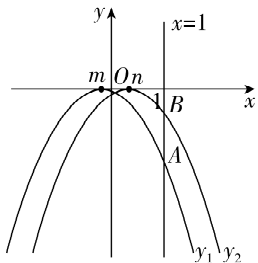


图(2)

如图(2)、图(3), 若  $m<1<n$ , 则  $a_1>a_2$  或  $a_1<a_2$ , 故 B, D 选项错误.



图(3)



图(4)

如图(4), 若  $m<n<1$ , 则  $a_1<a_2$ , 故 C 选项正确. 故选 C.

2. 4 5 【解析】由题意得当  $x=-4$  时,  $y_1=a(-4+2)^2=4a=b$ ,  $y_2=a(-4-2)^2=36a=d$ ,  $\therefore b=4a, d=36a$ . 当  $x=m$  时,  $y_1=a(m+2)^2=b+5$ , 将  $b=4a$  代入, 得  $a(m+2)^2=4a+5$ ;  $y_2=a(m-2)^2=b$ , 将  $b=4a$  代入, 得  $a(m-2)^2=4a$ , 化简得  $(m-2)^2=4$ , 解得  $m=4$  或  $m=0$ . 若  $m=0$ , 则可得  $4a=4a+5$ , 此情况不存在; 若  $m=4$ , 则可得  $36a=4a+5$ , 解得  $a=\frac{5}{32}$ , 符合

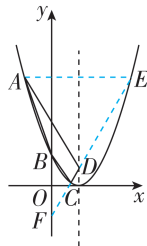
题意,  $\therefore d=36a=36 \times \frac{5}{32}=\frac{45}{8}$ ,  $b=4a=4 \times \frac{5}{32}=\frac{5}{8}$ .

$\frac{5}{8}$ ,  $\therefore d-b=\frac{45}{8}-\frac{5}{8}=5$ . 故答案为 4, 5.

3. 1 或 6 【解析】 $\because y=-(x-h)^2$ ,  $\therefore$  抛物线的开口向下, 对称轴为直线  $x=h$ ,  $\therefore$  当  $x<h$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大; 当  $x>h$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小.  $\therefore$  当  $2 \leq x \leq 5$  时, 函数有最大值  $-1$ ,  $\therefore$  ①若  $h>5$ , 则当  $x=5$  时, 函数有最大值, 为  $-(5-h)^2=-1$ , 解得  $h=4$  (舍去) 或  $h=6$ ; ②若  $h<2$ , 则当  $x=2$  时, 函数有最大值, 为  $-(2-h)^2=-1$ , 解得  $h=3$  (舍去) 或  $h=1$ ; ③若  $2 \leq h \leq 5$ , 则当  $x=h$  时, 函数有最大值, 为  $-(h-h)^2=0$ , 不符合题意. 故答案为 1 或 6.

4.  $2 \leq a \leq 10$  【解析】抛物线  $y=(x-a)^2$  的对称轴为直线  $x=a$ , 顶点坐标为  $(a,0)$ . 当对称轴在点  $P$  左侧时,  $a<3$ , 把  $P(3,1)$  代入  $y=(x-a)^2$  得  $1=(3-a)^2$ , 解得  $a=2$  或  $a=4$  (舍去); 当对称轴在点  $Q$  右侧时,  $a>9$ , 把  $Q(9,1)$  代入  $y=(x-a)^2$  得  $1=(9-a)^2$ , 解得  $a=10$  或  $a=8$  (舍去),  $\therefore$  当  $2 \leq a \leq 10$  时, 抛物线  $y=(x-a)^2$  与线段  $PQ$  有交点. 故答案为  $2 \leq a \leq 10$ .

5.  $(1, \frac{2}{3})$  【解析】抛物线  $y=a(x-1)^2$  的对称轴为直线  $x=1$ . 如图, 作点  $A$  关于直线  $x=1$  的对称点  $E$ , 则  $E(3,4)$ , 作点  $B$  关于  $x$  轴的对称点  $F$ , 连接  $EF$  交  $x$  轴于点  $C$ , 交直线  $x=1$  于点  $D$ , 此时四边形  $ABCD$  的周长取得最小值. 将点  $A(-1,4)$  代入  $y=a(x-1)^2$  得  $4a=4$ , 解得  $a=1$ ,  $\therefore$  抛物线表达式为  $y=(x-1)^2$ . 当  $x=0$  时,  $y=1$ ,  $\therefore$  点  $B$  的坐标为  $(0,1)$ , 则点  $F$  的坐标为  $(0,-1)$ . 设  $CD$  所在直线的表达式为  $y=mx+n$ . 将  $E(3,4), F(0,-1)$  代入得  $\begin{cases} 3m+n=4, \\ n=-1, \end{cases}$  解得



$\begin{cases} m=\frac{5}{3}, \\ n=-1, \end{cases} \therefore CD$  所在直线的表达式为  $y=\frac{5}{3}x-1$ .

1. 当  $x=1$  时,  $y=\frac{2}{3}$ ,  $\therefore D(1, \frac{2}{3})$ . 故答案为  $(1, \frac{2}{3})$ .

6. 【解】(1) 由  $y=2(x-1)^2$  得抛物线的顶点为  $A(1,0)$ .

当  $x=0$  时,  $y=2 \times (0-1)^2=2$ ,  $\therefore$  点  $B(0,2)$ .

(2) 设点  $P$  的坐标为  $(x_p, y_p)$  ( $x_p>0, y_p>0$ ).

### 思路分析

作点  $A$  关于抛物线对称轴的对称点  $E$ , 点  $B$  关于  $x$  轴的对称点  $F$ , 连接  $EF$  交  $x$  轴于点  $C$ , 交对称轴于点  $D$ , 此时四边形  $ABCD$  的周长取得最小值, 再求得抛物线表达式即可求得点  $B$  坐标, 利用对称的性质得出点  $E, F$  的坐标后求出直线  $EF$  的表达式, 即可求解.

$\therefore y=2(x-1)^2$ ,  $\therefore$  抛物线的对称轴为直线  $x=1$ .  $\therefore$  点  $C$  为点  $B$  关于对称轴对称的点,  $B(0, 2)$ ,  $\therefore C(2, 2)$ ,  $\therefore BC=2$ .

$\therefore S_{\triangle PBC}=8$ ,  $\therefore \frac{1}{2}BC \times |y_p - 2| = 8$ , 即  $\frac{1}{2} \times 2 \times |y_p - 2| = 8$ , 解得  $y_p = 10$  或  $y_p = -6$  (舍去).

$\therefore$  点  $P$  在抛物线上, 将  $y_p = 10$  代入抛物线  $y=2(x-1)^2$  得  $2(x-1)^2 = 10$ , 解得  $x = 1 \pm \sqrt{5}$ .

$\therefore P$  在第一象限内,  $\therefore x = 1 + \sqrt{5}$ ,  $\therefore$  点  $P$  的坐标为  $(1 + \sqrt{5}, 10)$ .

### 刷素养

7. 【解】(1) 对于直线  $y = -x - 2$ , 令  $x = 0$ , 可得  $y = -2$ , 则点  $B$  坐标为  $(0, -2)$ ; 令  $y = 0$ , 可得  $x = -2$ , 则点  $A$  坐标为  $(-2, 0)$ .  $\therefore$  抛物线  $y = a(x-h)^2$  的顶点为  $A$ , 且经过点  $B$ ,  $\therefore y = a(x+2)^2$ .

将  $(0, -2)$  代入, 得  $-2 = 4a$ , 解得  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $\therefore$  抛物线表达式为  $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2$ .

$\therefore$  点  $C(m, -\frac{9}{2})$  在抛物线  $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2$  上,  $\therefore -\frac{1}{2}(m+2)^2 = -\frac{9}{2}$ , 整理得  $m^2 + 4m - 5 = 0$ , 解得  $m_1 = 1, m_2 = -5$ . 故  $m$  的值为 1 或 -5.

(2) 由 (1) 可知抛物线的对称轴为直线  $x = -2$ . 如图, 设点  $B$  关于对称轴直线  $x = -2$  的对称点为  $B'$ , 连接  $OB'$ , 则  $OB'$  与对称轴的交点即为点  $P$ , 此时  $PO + PB = OP + PB' = OB'$ , 值最小.

$\therefore$  点  $B$  坐标为  $(0, -2)$ , 对称轴是直线  $x = -2$ ,  $\therefore B'(-4, -2)$ . 易得直线  $OB'$  的表达式为  $y = \frac{1}{2}x$ , 当  $x = -2$  时,  $y = -1$ , 故  $P(-2, -1)$ .

### 课时 5 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与性质

### 刷基础

1. B 【解析】由图象可知顶点  $(h, -k)$  在第一象限, 则  $(k, h)$  在第二象限. 故选 B.

2. A 【解析】 $\therefore y = -(x+1)^2 - 3$ ,  $\therefore$  抛物线开口向下, 对称轴为直线  $x = -1$ , 顶点坐标为  $(-1, -3)$ ,  $\therefore$  当  $x = -1$  时,  $y$  有最大值为  $-3$ , 当  $x > -1$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小,  $\therefore$  只有 A 选项正确. 故选 A.

### 思路分析

(1) 将  $x = 0$ ,  $y = 0$  分别代入直线的表达式, 可求出点  $A, B$  的坐标, 再利用待定系数法求出抛物线的表达式, 进而可求  $m$  的值. (2) 设点  $B$  关于对称轴  $x = -2$  的对称点为点  $B'$ , 连接  $OB'$ , 则  $OB'$  与对称轴的交点即为点  $P$ , 易得直线  $OB'$  的表达式, 将  $x = -2$  代入, 即可求得点  $P$  的坐标.

### 关键点拨

(2) 将二次函数表达式化为顶点式  $y = -(x-m)^2 + m^2 + 1$ , 得到其图象的顶点坐标为  $(m, m^2 + 1)$ , 验证顶点坐标是否在抛物线  $y = x^2 + 1$  上即可.

3. 0 (答案不唯一) 【解析】抛物线  $y = (x-m)^2 + 1$  的顶点为  $(m, 1)$ , 开口向上, 对称轴为直线  $x = m$ , 对于开口向上的二次函数, 在对称轴右侧 (即  $x > m$  时),  $y$  随  $x$  的增大而增大. 因为当  $x > 1$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大, 所以  $m \leq 1$ . 故答案为 0 (答案不唯一).

4. D 【解析】 $y = 2x^2 - 4x + 6 = 2(x^2 - 2x + 1) + 4 = 2(x-1)^2 + 4$ . 故选 D.

5. 3 【解析】根据题意知, 原抛物线的顶点坐标是  $(0+1, 4-2)$ , 即  $(1, 2)$ , 则原抛物线的表达式为  $y = -(x-1)^2 + 2 = -x^2 + 2x + 1$ . 故  $m = 2, n = 1$ , 所以  $m+n = 2+1 = 3$ . 故答案为 3.

6. C 【解析】A 选项, 抛物线  $y = -2x^2 + 2$  的对称轴是直线  $x = 0$ , 不符合题意; B 选项, 抛物线  $y = x^2 - 1$  的对称轴是直线  $x = 0$ , 不符合题意; C 选项,  $y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ , 所以抛物线  $y = x^2 - 2x$  的对称轴是直线  $x = 1$ , 符合题意; D 选项,  $y = -2x^2 - 2x = -2(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$ , 所以抛物线  $y = -2x^2 - 2x$  的对称轴是直线  $x = -\frac{1}{2}$ , 不符合题意. 故选 C.

7. -3 下  $(1, 6)$  【解析】把  $(0, 0)$  代入  $y = (a-3)x^2 + 12x + a^2 - 9$ , 得  $a^2 - 9 = 0$ , 解得  $a_1 = 3, a_2 = -3$ .  $\therefore a - 3 \neq 0$ ,  $\therefore a \neq 3$ ,  $\therefore a$  的值为  $-3$ ,  $\therefore y = -6x^2 + 12x = -6(x-1)^2 + 6$ ,  $\therefore$  函数图象开口向下, 顶点坐标为  $(1, 6)$ . 故答案为  $-3$ , 下,  $(1, 6)$ .

8. (1) 【解】当  $m = -1$  时, 二次函数为  $y = -x^2 - 2x + 1 = -(x+1)^2 + 2$ .

①该函数图象的顶点坐标为  $(-1, 2)$ , 故答案为  $(-1, 2)$ .

②由①知该函数图象的顶点坐标为  $(-1, 2)$ . 由于  $-2 < -1 < 2$ , 故当  $-2 \leq x \leq 2$  时, 该函数的最大值为 2, 故答案为 2.

(2) 【证明】二次函数  $y = -x^2 + 2mx + 1 = -(x-m)^2 + m^2 + 1$ , 则其图象的顶点坐标为  $(m, m^2 + 1)$ . 将  $x = m$  代入  $y = x^2 + 1$  得  $y = m^2 + 1$ , 因此, 不论  $m$  为何值, 该函数图象顶点始终在抛物线  $y = x^2 + 1$  上.

(3) 【解】由 (2) 可知该二次函数图象的顶点坐标为  $(m, m^2 + 1)$ . 因为当  $1 < x_1 < x_2$  时, 总有  $y_1 > y_2$ , 所以当  $x > 1$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小. 由于该二次函数的图象开口向下, 对称轴为直线  $x = m$ , 所以  $m \leq 1$ , 故答案为  $m \leq 1$ .

- 9. B** 【解析】∵ 图象开口向下,与  $y$  轴交于正半轴,对称轴为直线  $x=1$ , ∴  $a<0, c>0, -\frac{b}{2a}=1$ , ∴  $b=-2a>0$ , ∴  $abc<0, 2a+b=0$ , ∴ ①错误, ④正确. 当  $x=-1$  时,由图象知  $y<0$ ,把  $x=-1$  代入表达式,得  $a-b+c<0$ , ∴  $a+c<b$ , ∴ ②正确. ∵  $c>0, b=-2a$ , ∴  $4a+2b+c=4a-4a+c=c>0$ , ∴ ③正确. ∵  $x=1$  时,  $y=a+b+c$ ,  $x=m$  时,  $y=am^2+bm+c$ . ∵  $m \neq 1$ , ∴  $a+b+c>am^2+bm+c$ , ∴  $am^2+bm<a+b$ , ∴ ⑤错误. 故正确的是 ②③④,共 3 个. 故选 B.

### 刷易错

- 10. 4** 【解析】∵ 抛物线  $y=mx^2+4x+m-1$  的对称轴为直线  $x=-\frac{2}{m}$ , ∴ 当  $x=-\frac{2}{m}$  时,  $y$  有最小值, ∴  $m \cdot \left(-\frac{2}{m}\right)^2 - 4 \times \frac{2}{m} + m - 1 = 2$ , 整理可得  $m^2 - 3m - 4 = 0$ , 解得  $m = -1$  或  $m = 4$ . 又∵ 函数有最小值, ∴  $m > 0$ , ∴  $m = 4$ .

### 刷提升

- 1. B** 【解析】将抛物线  $y=x^2+kx-k^2$  向右平移 3 个单位长度,所得抛物线对应的函数表达式为  $y=(x-3)^2+k(x-3)-k^2$ ,再向上平移 1 个单位长度,所得抛物线对应的函数表达式为  $y=(x-3)^2+k(x-3)-k^2+1$ . ∵ 得到的抛物线正好经过坐标原点, ∴  $0=(0-3)^2+k(0-3)-k^2+1$ , 即  $k^2+3k-10=0$ , 解得  $k=-5$  或  $k=2$ . ∵ 抛物线  $y=x^2+kx-k^2$  的对称轴在  $y$  轴右侧, ∴  $x=-\frac{k}{2}>0$ , ∴  $k<0$ , ∴  $k=-5$ . 故选 B.
- 2. D** 【解析】∵ 点  $P$ 、点  $Q$  和点  $M$  的纵坐标相同, ∴ 抛物线不可能同时经过这三点. 当抛物线过点  $P$ 、点  $Q$  和点  $N$  时,对称轴为直线  $x=\frac{m-1+m+1}{2}=m$ . ∵  $m<m+1<m+2, n>n-1$ , ∴ 抛物线的开口向下, ∴  $a<0$ . 当抛物线过点  $P$ 、点  $M$  和点  $N$  时,对称轴为直线  $x=\frac{m-1+m+3}{2}=m+1$ . ∵  $m+1<m+2<m+3, n>n-1$ , ∴ 抛物线的开口向上, ∴  $a>0$ , 此时  $PM=m+3-(m-1)=4$ . 当抛物线过点  $Q$ 、点  $M$  和点  $N$  时,对称轴为直线  $x=\frac{m+1+m+3}{2}=m+2$ . ∵  $m+2<m+3, n>n-1$ , ∴ 抛物线的开口向上, ∴  $a>0$ , 此时  $QM=m+3-(m+1)=2$ . ∵  $4>2$ , ∴ 当抛物线过点  $Q$ 、点

### 关键点拨

本题的关键是能识别出原抛物线与直线  $x=0$  组成的图形绕点  $O$  顺时针旋转  $45^\circ$  和新曲线与直线  $y=x$  组成的图形完全重合,由此得到  $OM=OM'$ .

### 易错警示

解题时易忽视根据函数有最小值,可得  $m>0$  这一隐含条件致错.

### 思路分析

根据二次函数图象的对称性,得到二次函数的图象经过点  $P$ 、点  $Q$  和点  $N$  或点  $P$ 、点  $M$  和点  $N$  或点  $Q$ 、点  $M$  和点  $N$ , 分别根据二次函数的性质和各点的坐标判断  $a$  的情况即可.

$M$  和点  $N$  时,  $a$  的值最大. 故选 D.

- 3. 1** 【解析】∵ 二次函数  $y=-ax^2+bx+2$  有最大值为 4, ∴ 与二次函数  $y=-ax^2+bx+2$  的图象关于  $x$  轴对称的图象对应的函数有最小值为 -4, 即函数  $y=ax^2-bx-2$  有最小值 -4. 将抛物线  $y=ax^2-bx-2$  向右平移 1 个单位长度,再向上平移 5 个单位长度得到抛物线  $y=a(x-1)^2-b(x-1)+3$ , 则此时函数的最小值为 1, ∴  $y=a(x-1)^2-b(x-1)+3$  的最小值为 1. 故答案为 1.

- 4.  $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$**  【解析】∵ 直线  $y=x$  绕原点  $O$  逆时针旋转  $45^\circ$  得到直线  $x=0$ , 设抛物线  $y=2(x+1)^2+1$  与  $y$  轴的交点为  $M'$ , 则  $OM=OM'$ . 将  $x=0$  代入  $y=2(x+1)^2+1$ , 得  $y=3$ , ∴  $OM'=3$ . 设点  $M(m, m)$ . ∵  $OM=OM'=3$ , ∴  $m^2+m^2=3^2$ , ∴  $m=\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (负值已舍去), ∴ 点  $M$  的坐标为  $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ . 故答案为  $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ .

- 5.  $2 \leq m \leq 4$**  【解析】∵ 二次函数  $y=-x^2+4x+3$  的图象与  $y$  轴交于点  $A$ , 当  $x=0$  时,  $y=3$ , ∴ 点  $A$  的坐标为  $(0, 3)$ . 将二次函数表达式化为顶点式为  $y=-(x-2)^2+7$ , ∴ 二次函数图象的顶点坐标为  $(2, 7)$ , 开口向下. 如图 (1), 当  $0<m<2$  时,  $3<n<7$ , 此时最大值为  $n$ , 最小值为 3,  $0<n-3<4$ . ∵ 抛物线的对称轴为直线  $x=2$ , ∴ 点  $A$  关于对称轴对称的点为  $(4, 3)$ .

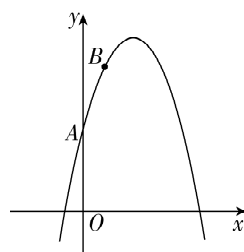


图 (1)

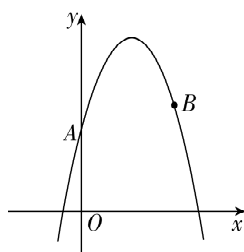


图 (2)

如图 (2), 当  $2 \leq m \leq 4$  时,  $3 \leq n \leq 7$ , 此时最大值为 7, 最小值为 3,  $7-3=4$ .

如图 (3), 当  $m>4$  时, 此时最大值为 7, 最小值为  $n, n<3$ , 则  $7-n=9$ , 即  $7-(-m^2+4m+3)=9$ , 且  $7-n>4$ , 解得  $m=5$  或  $m=-1$  (舍去), ∴ 当  $m=5$  时, 函数图象取  $A, B$  之间的部分时, 函数最大值与最小值之差等于

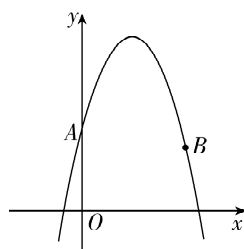


图 (3)



9. 若函数图象取  $A, B$  之间的部分时函数最大值与最小值之差始终等于 4, 则  $m$  的取值范围是  $2 \leq m \leq 4$ . 故答案为  $5, 2 \leq m \leq 4$ .

6. 【解】(1)  $\because y = x^2 - 2mx + 2m - 3 = x^2 - (2x - 2)m - 3$ , 当  $2x - 2 = 0$ , 即  $x = 1$  时,  $y = x^2 - (2x - 2)m - 3 = 1 - 3 = -2$ ,  $\therefore$  不论  $m$  为何值, 该函数图象恒过定点, 定点为  $(1, -2)$ . 故答案为  $(1, -2)$ .

(2)  $\because y = x^2 - 2mx + 2m - 3$ ,  $\therefore$  二次函数图象的对称轴为直线  $x = -\frac{-2m}{2 \times 1} = m$ .

当  $m < -3$  时, 点  $A(-3, y_1), B(2, y_2)$  在函数图象对称轴的右侧, 此时  $y$  随  $x$  的增大而增大, 则  $y_1 < y_2$ , 不符合题意, 舍去;

当  $m > 2$  时, 点  $A(-3, y_1), B(2, y_2)$  在函数图象对称轴的左侧, 此时  $y$  随  $x$  的增大而减小, 则  $y_1 > y_2$ , 符合题意;

当  $-3 \leq m \leq 2$  时, 由  $y_1 > y_2$  得出点  $A$  到对称轴的距离大于点  $B$  到对称轴的距离,  $\therefore m - (-3) > 2 - m$ , 解得  $m > -\frac{1}{2}$ ,  $\therefore -\frac{1}{2} < m \leq 2$ .

综上所述,  $m$  的取值范围为  $m > -\frac{1}{2}$ .

#### 刷素养

7. 【解】(1) 当  $m = 1$  时,  $y = x(x - 2) = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$ ,  $\therefore$  当  $m = 1$  时, 抛物线的顶点坐标为  $(1, -1)$ .

(2) ①由抛物线  $y = mx(x - 2m) = m(x - m)^2 - m^3$  得其对称轴为直线  $x = m$ .

$\because M(x_1, y_1)$  和  $N(x_2, y_2)$  是抛物线上的两点, 且对于  $x_1 = -1, x_2 = 2$ , 有  $y_1 = y_2$ ,  $\therefore$  点  $M, N$  关于直线  $x = m$  对称,  $\therefore m = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2}$ .

②当  $x_1 = 2m$  时,  $y_1 = 0$ , 则  $M(2m, 0)$ . 当  $m > 0$  时, 抛物线的开口向上, 且  $2m > m$ .

$\because$  点  $M$  关于直线  $x = m$  的对称点为  $M'(0, 0)$ ,  $x > m$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大,  $x < m$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小,  $\therefore$  若当  $3 \leq x_2 \leq 4$  时, 都有  $y_1 < y_2$ , 则  $2m < 3$ , 解得  $m < \frac{3}{2}$ ,  $\therefore 0 < m < \frac{3}{2}$ .

当  $m < 0$  时, 抛物线的开口向下, 且  $2m < m$ .  $\because$  点  $M(2m, 0)$  关于直线  $x = m$  的对称点为  $M'(0, 0)$ ,  $x > m$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小,  $\therefore$  当  $3 \leq x_2 \leq 4$  时, 都有  $y_1 > y_2$ , 不符合题意.

综上, 满足条件的  $m$  的取值范围为  $0 < m < \frac{3}{2}$ .

#### 关键点拨

先定抛物线的顶点与  $y$  轴交点, 再分段讨论最值差, 结合图象确定  $m$  的取值.

#### 思路分析

分  $a > 0$  和  $a < 0$  两种情况讨论, 根据已知三点与对称轴的距离, 结合抛物线开口方向分析即可.

#### 关键点拨

(2) ②分  $m > 0$  和  $m < 0$  两种情况讨论.

#### 易错警示

未分  $a > 0$  与  $a < 0$  讨论抛物线开口方向, 导致最值计算与差值求解错误.



#### 微专题

1. A 【解析】 $\because$  点  $(2, a), (-1, b), (3, c)$  都在抛物线  $y = x^2 + x + 2$  上,  $\therefore a = 2^2 + 2 + 2 = 8, b = (-1)^2 - 1 + 2 = 2, c = 3^2 + 3 + 2 = 14, \therefore c > a > b$ . 故选 A.

2. A 【解析】 $\because$  抛物线表达式为  $y = 3(x + 1)^2 + 4m$ ,  $\therefore$  该抛物线开口向上, 且对称轴为直线  $x = -1$ ,  $\therefore$  在对称轴右侧,  $y$  随  $x$  增大而增大.  $\because$  点  $A(-2, y_1)$  关于直线  $x = -1$  的对称点坐标为  $(0, y_1)$ , 且  $0 < 1 < 2$ ,  $\therefore y_1 < y_2 < y_3$ . 故选 A.

3. B 【解析】在  $y = ax^2 - 2ax - 3a (a \neq 0)$  中, 其图象的对称轴为直线  $x = -\frac{-2a}{2a} = 1$ .  $\because -1 < x_1 < 0, 1 < x_2 < 2, x_3 > 3, \therefore |x_3 - 1| > |x_1 - 1| > |x_2 - 1|$ ,  $\therefore$  点  $(x_3, y_3)$  离对称轴最远, 点  $(x_2, y_2)$  离对称轴最近. 当  $a > 0$  时, 抛物线开口向上,  $\therefore y_3 > y_1 > y_2$ ; 当  $a < 0$  时, 抛物线开口向下,  $\therefore y_3 < y_1 < y_2$ . 综上,  $y_2$  和  $y_3$  可能最大, 也可能最小,  $y_1$  不可能最大, 也不可能最小. 故选 B.

4. 【解】(1)  $\because$  对于  $x_1 = 3, x_2 = 4$  有  $y_1 = y_2$ ,  $\therefore$  抛物线的对称轴为直线  $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{7}{2}$ .

$\therefore$  抛物线的对称轴为直线  $x = t, \therefore t = \frac{7}{2}$ .

(2)  $\because 2 < x_1 < 3, 3 < x_2 < 4, \therefore \frac{5}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{7}{2}, x_1 < x_2$ . 又  $\because y_1 < y_2, a > 0, \therefore$  点  $(x_1, y_1)$  离对称轴更近, 则点  $(x_1, y_1)$  与  $(x_2, y_2)$  连线的中点在对称轴的右侧,  $\therefore \frac{x_1 + x_2}{2} > t$ , 即  $t \leq \frac{5}{2}$ .



#### 微专题

1. C 【解析】 $\because y = ax^2 - 4ax + 3 = a(x - 2)^2 + 3 - 4a, \therefore$  抛物线的对称轴为直线  $x = 2$ . ①当  $a > 0$  时, 抛物线开口向上,  $\therefore$  当  $x = 2$  时, 函数有最小值  $3 - 4a$ , 当  $x = 4$  时, 函数有最大值 3.  $\because$  函数的最大值与最小值之差为 8,  $\therefore 3 - (3 - 4a) = 8$ , 解得  $a = 2$ . ②当  $a < 0$  时, 抛物线开口向下,  $\therefore$  当  $x = 2$  时, 函数有最大值  $3 - 4a$ , 当  $x = 4$  时, 函数有最小值 3.  $\because$  函数的最大值与最小值之差为 8,  $\therefore 3 - 4a - 3 = 8$ , 解得  $a = -2$ . 综上可知,  $a$  的值为 2 或 -2. 故选 C.

2. (1) 1 或  $-\frac{1-\sqrt{5}}{2}$  (2)  $-2 \leq m \leq -1$

【解析】(1) 抛物线  $y = x^2 - 2x + m - 1$  的对称轴为直线  $x = 1$ , 抛物线开口向上,  $\therefore$  当  $x > 1$  时,  $y$

随  $x$  的增大而增大; 当  $x < 1$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小. ①当  $\frac{m}{2} > 1$ , 即  $m > 2$  时, 则当  $x = \frac{m}{2}$  时,

$$y = -1, \therefore \left(\frac{m}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{m}{2} + m - 1 = -1, \text{解得 } m =$$

0, 不符合题意, 舍去. ②当  $\frac{m}{2} \leq 1 \leq m + 1$ , 即

$0 \leq m \leq 2$  时, 则当  $x = 1$  时,  $y = -1$ ,  $\therefore 1 - 2 + m -$

$1 = -1$ , 解得  $m = 1$ . ③当  $m + 1 < 1$ , 即  $m < 0$  时, 则

当  $x = m + 1$  时,  $y = -1$ ,  $\therefore (m + 1)^2 - 2(m +$

$1) + m - 1 = -1$ ,  $\therefore m^2 + m - 1 = 0$ , 解得  $m_1 =$

$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ ,  $m_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  (舍去). 综上所述,  $m = 1$

或  $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ . 故答案为 1 或  $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ .

(2) 二次函数  $y = ax^2 + 2ax + 1 = a(x + 1)^2 - a + 1$

( $a > 0$ ),  $\therefore$  该函数图象开口向上, 对称轴是直

线  $x = -1$ , 当  $x = -1$  时, 该函数取得最小值  $-a +$

$1$ .  $\therefore$  当  $m \leq x \leq 0$  时,  $y$  有最小值  $1 - a$  和最

大值  $1$ , 且当  $x = 0$  时,  $y = 1$ , 根据抛物线的对称

性, 当  $x = -2$  时,  $y = 1$ ,  $\therefore -2 \leq m \leq -1$ , 故答案

为  $-2 \leq m \leq -1$ .

3. -1 或 -2 【解析】 $y = x^2 + 2ax = (x + a)^2 - a^2$ ,

$\therefore$  抛物线对称轴为直线  $x = -a$ , 抛物线开口向

上. ①若  $-a < 0$ , 即  $a > 0$ , 则当  $x = 0$  时,  $m = 0$ , 当

$x = 3$  时,  $M = 9 + 6a$ .  $\therefore M - m = 4$ ,  $\therefore 9 + 6a - 0 = 4$ ,

解得  $a = -\frac{5}{6}$  (舍去). ②若  $0 \leq -a \leq 1.5$ , 即

$-1.5 \leq a \leq 0$ , 则当  $x = -a$  时,  $m = -a^2$ , 当  $x = 3$

时,  $M = 9 + 6a$ .  $\therefore M - m = 4$ ,  $\therefore 9 + 6a + a^2 = 4$ , 解得

$a = -1$  或  $a = -5$  (舍去). ③若  $1.5 < -a \leq 3$ , 即

$-3 \leq a < -1.5$ , 则当  $x = -a$  时,  $m = -a^2$ , 当  $x = 0$

时,  $M = 0$ .  $\therefore M - m = 4$ ,  $\therefore 0 - (-a^2) = 4$ , 解得

$a = -2$  或  $a = 2$  (舍去). ④若  $-a > 3$ , 即  $a < -3$ , 则

当  $x = 3$  时,  $m = 9 + 6a$ , 当  $x = 0$  时,  $M = 0$ .

$\therefore M - m = 4$ ,  $\therefore 0 - (9 + 6a) = 4$ , 解得  $a = -\frac{13}{6}$  (舍

去). 综上所述,  $a$  的值是  $-1$  或  $-2$ , 故答案为  $-1$  或  $-2$ .

4. 【解】 $y = x^2 + 2mx + 4m^2 = (x + m)^2 + 3m^2$ ,  $\therefore$  抛物

线对称轴是直线  $x = -m$ , 抛物线开口向上.

①当  $2m > -m$ , 即  $m > 0$  时, 当  $x = 2m$  时,  $y = 9$ ,

$\therefore 4m^2 + 4m^2 + 4m^2 = 9$ , 解得  $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$  (负值已舍

去), 此时的二次函数表达式为  $y = x^2 + \sqrt{3}x + 3$ .

### 关键点拨

(1) 依据题意, 可得抛物线对称轴为直线  $x = 1$ , 进而结合二次函数的性质分  $\frac{m}{2} > 1$ ,  $\frac{m}{2} \leq 1 \leq m + 1$  和  $m + 1 < 1$  三种情形进行讨论即可得解.

### 关键点拨

(2) 先用含  $m$  的代数式分别表示出  $y_1$  和  $y_2$ , 再用作差法比较  $y_1$  和  $y_2$  的大小即可.

②当  $2m \leq -m \leq 2m + 3$ , 即  $-1 \leq m \leq 0$  时, 当  $x = -m$  时,  $y = 9$ ,  $\therefore 3m^2 = 9$ , 解得  $m = \pm\sqrt{3}$  (都不符合题意, 舍去).

③当  $2m + 3 < -m$ , 即  $m < -1$  时, 当  $x = 2m + 3$  时,  $y = 9$ ,  $\therefore (2m + 3)^2 + 2m(2m + 3) + 4m^2 = 9$ , 解得  $m = 0$  (舍去) 或  $-1.5$ , 此时的二次函数表达式为  $y = x^2 - 3x + 9$ .

综上, 二次函数表达式为  $y = x^2 + \sqrt{3}x + 3$  或  $y = x^2 - 3x + 9$ .

## 6.3 确定二次函数的表达式



### 刷基础

1. 8 【解析】依据题意, 设抛物线的表达式为

$h = at^2 + bt + c$ . 将  $(0, 0)$ ,  $(2, \frac{3}{2})$ ,  $(6, \frac{3}{2})$  代入得

$$\begin{cases} c = 0, \\ \frac{3}{2} = 4a + 2b + c, \\ \frac{3}{2} = 36a + 6b + c, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{8}, \\ b = 1, \\ c = 0, \end{cases} \therefore \text{抛物线的表}$$

达式为  $h = -\frac{1}{8}t^2 + t$ . 当  $h = 0$  时,  $-\frac{1}{8}t^2 + t = 0$ , 解

得  $t = 0$  或  $t = 8$ ,  $\therefore$  该运动员踢出的足球在第 8 s 落地, 故答案为 8.

2. -19 【解析】 $\because A, B, D$  的纵坐标相同,  $\therefore$  二

次函数图象不会同时经过  $A, B, D$  三点,  $\therefore$  分

以下三种情况: ①经过  $A, B, C$ ; ②经过  $B, D,$

$C$ ; ③经过  $A, D, C$ . 易知图象经过  $B, D, C$  三

点的二次函数,  $a + b + c$  的值最小. 把  $B(4, 2)$ ,

$C(6, 6)$ ,  $D(8, 2)$  代入  $y = ax^2 + bx + c$ , 得

$$\begin{cases} 16a + 4b + c = 2, \\ 36a + 6b + c = 6, \\ 64a + 8b + c = 2, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = -1, \\ b = 12, \\ c = -30, \end{cases} \text{此时 } a + b + c =$$

$-19$ , 故  $a + b + c$  的最小值等于  $-19$ . 故答案

为  $-19$ .

3. 【解】(1) 将点  $A(-1, -\frac{1}{2})$  和点  $B(2, 1)$  分别

代入表达式, 得  $\begin{cases} -\frac{1}{2} = a - 1 + c, \\ 1 = 4a + 2c, \end{cases}$  解得

$\begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ c = 1, \end{cases} \therefore$  二次函数的表达式为  $y = -\frac{1}{2}x^2 +$

$x + 1$ .

(2) 当  $m < -\frac{1}{2}$  时,  $y_1 < y_2$ ; 当  $m = -\frac{1}{2}$  时,  $y_1 = y_2$ ;

当  $m > -\frac{1}{2}$  时,  $y_1 > y_2$ . 理由如下:

将点  $C(m+1, y_1)$  代入  $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$ , 得  $y_1 = -\frac{1}{2}(m+1)^2 + m + 1 + 1 = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}$ ,

同理得  $y_2 = -\frac{1}{2}m^2 - m + 1$ ,  $\therefore y_1 - y_2 = \left(-\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}m^2 - m + 1\right) = m + \frac{1}{2}$ .

当  $m < -\frac{1}{2}$  时,  $m + \frac{1}{2} < 0$ , 此时  $y_1 - y_2 < 0$ , 即  $y_1 < y_2$ ; 当  $m > -\frac{1}{2}$  时,  $m + \frac{1}{2} > 0$ , 此时  $y_1 - y_2 > 0$ , 即  $y_1 > y_2$ ; 当  $m = -\frac{1}{2}$  时,  $m + \frac{1}{2} = 0$ , 此时  $y_1 - y_2 = 0$ ,

即  $y_1 = y_2$ . 综上, 当  $m < -\frac{1}{2}$  时,  $y_1 < y_2$ ; 当  $m = -\frac{1}{2}$

时,  $y_1 = y_2$ ; 当  $m > -\frac{1}{2}$  时,  $y_1 > y_2$ .

**4. -8 【解析】** $\because$  抛物线的对称轴是直线  $x = 2$ , 顶点在直线  $y = x - 1$  上,  $\therefore$  该抛物线的顶点坐标是  $(2, 1)$ . 设该抛物线的表达式为  $y = a(x - 2)^2 + 1$ . 将点  $(3, -8)$  代入, 得  $-8 = a(3 - 2)^2 + 1$ , 解得  $a = -9$ ,  $\therefore$  该抛物线的表达式是  $y = -9(x - 2)^2 + 1$ .  $\because -9 < 0$ ,  $\therefore$  抛物线开口向下.  $\because$  对称轴是直线  $x = 2$ ,  $\therefore$  当  $x < 2$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大.  $\because 0 \leq x \leq 1$ ,  $\therefore$  当  $x = 1$  时,  $y$  有最大值, 最大值为  $-8$ . 故答案为  $-8$ .

**5.  $y = (x - 3)^2 + 1$  【解析】** $\because$  抛物线经过  $B(m + 2, n)$ ,  $C(4 - m, n)$ ,  $\therefore$  抛物线的对称轴为直线  $x = \frac{m + 2 + 4 - m}{2} = 3$ . 设抛物线的表达式为  $y = a(x - 3)^2 + k$ . 将  $A(0, 10)$ ,  $D(3, 1)$  分别代入, 得  $\begin{cases} a(0 - 3)^2 + k = 10, \\ a(3 - 3)^2 + k = 1, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} a = 1, \\ k = 1, \end{cases}$   $\therefore$  抛物线的表达式为  $y = (x - 3)^2 + 1$ , 故答案为  $y = (x - 3)^2 + 1$ .

**6. B 【解析】** $\because$  二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象经过  $A(-2, 0)$  和  $B(2, 0)$ ,  $\therefore$  二次函数表达式可以写成  $y = a(x - 2)(x + 2) = a(x^2 - 4)$ .  $\therefore$  图象经过点  $C(m, n)$ ,  $\therefore n = a(m^2 - 4)$ ,  $\therefore a = \frac{n}{m^2 - 4}$  ( $m^2 \neq 4$ ). 当  $m = 0, n = -4$  时,  $a = \frac{-4}{0^2 - 4} = \frac{-4}{-4} = 1$ ; 当  $m = 1, n = -4$  时,  $a = \frac{-4}{1^2 - 4} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$ ;

### 关键点拨

设  $x_1 < x_2$ , 由  $\triangle ABC$  的面积为 3 可得  $AB = x_2 - x_1 = 2$ , 结合  $x_1 + x_2 = 4$ , 求出  $x_1, x_2$  的值是解题的关键.

当  $m = -4, n = 1$  时,  $a = \frac{1}{(-4)^2 - 4} = \frac{1}{16 - 4} = \frac{1}{12}$ ;

当  $m = 4, n = -1$  时,  $a = \frac{-1}{4^2 - 4} = \frac{-1}{16 - 4} = -\frac{1}{12}$ .

$\therefore \frac{4}{3} > 1 > \frac{1}{12} > -\frac{1}{12}$ ,  $\therefore$  当  $m = 1, n = -4$  时  $a$  的值最大. 故选 B.

**7. 2 【解析】**设  $x_1 < x_2$ , 则  $AB = x_2 - x_1$ . 由  $\triangle ABC$  的面积为 3, 且  $C(0, 3)$ , 得  $AB = 2$ ,  $\therefore AB = x_2 - x_1 = 2$ . 联立  $\begin{cases} x_2 - x_1 = 2, \\ x_1 + x_2 = 4, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 3, \end{cases}$   $\therefore y = ax^2 + bx + c = a(x - 1)(x - 3)$ , 将  $C(0, 3)$  代入, 得  $3a = 3$ ,  $\therefore a = 1$ ,  $\therefore y = ax^2 + bx + c = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$ ,  $\therefore b = -4, c = 3$ ,  $\therefore 3a + b + c = 3 \times 1 + (-4) + 3 = 2$ . 故答案为 2.

**8. (1) 【证明】**令  $y = 0$ , 则  $a(x - m)(x - m - 6) = 0$ ,  $\therefore x_1 = m, x_2 = m + 6$ .  $\because m \neq m + 6$ ,  $\therefore$  该函数的图象与  $x$  轴有两个交点.

**【解】**(2)  $\because$  抛物线的对称轴为直线  $x = \frac{m + m + 6}{2} = m + 3$ , 顶点  $A$  的纵坐标为  $-9$ ,

$\therefore$  当  $x = m + 3$  时,  $y = -9a = -9$ ,  $\therefore a = 1$ .

$\therefore$  该函数图象与  $y$  轴交于  $B(0, -5)$ ,

$\therefore (0 - m)(0 - m - 6) = -5$ , 即  $m^2 + 6m + 5 = 0$ ,

$\therefore (m + 1)(m + 5) = 0$ , 解得  $m_1 = -1, m_2 = -5$ .

当  $m = -5$  时,  $y = (x + 5)(x - 1) = x^2 + 4x - 5$ ;

当  $m = -1$  时,  $y = (x + 1)(x - 5) = x^2 - 4x - 5$ ,

$\therefore$  该函数的表达式为  $y = x^2 + 4x - 5$  或  $y = x^2 - 4x - 5$ .

(3)  $\because$  函数图象顶点  $A$  的纵坐标为负数, 且与  $x$  轴有两个交点,  $\therefore$  抛物线开口向上.

$\therefore$  对称轴为直线  $x = m + 3$ ,  $\therefore$  当  $m + 3 = \frac{-6 + 2}{2} =$

$-2$ , 即  $m = -5$  时,  $y_1 = y_2$ ;

当  $m > -5$  时,  $y_1 > y_2$ ; 当  $m < -5$  时,  $y_1 < y_2$ .

## 大招专题 1 二次函数中的最值问题



### 刷难关

#### 大招解读 | 几何定理法求线段之差(和)的最值

(1) 线段之差最大问题: 当两定点和动点共线时, 线段之差最大, 所以动点在两定点所在的直线上, 求解时可过两定点作直线.

(2) 线段之和(周长)最小问题: 这类问题一般是将军饮马中“两定点, 定线上一动点”, 求解时作对称点, 将求和的两条线段转化到一条线段上.

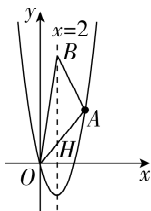
1. 【解】(1)  $\because$  抛物线过点  $O(0,0), A(5,5)$ , 且它的对称轴为直线  $x=2$ ,  $\therefore$  抛物线与  $x$  轴的另一个交点的坐标为  $(4,0)$ .

设抛物线表达式为  $y=ax(x-4)$ .

把  $A(5,5)$  代入, 得  $5a=5$ , 解得  $a=1$ ,

$\therefore$  此抛物线的表达式为  $y=x^2-4x$ .

(2) ①如图(1), 点  $B$  是抛物线对称轴上的一点, 且点  $B$  在第一象限,  $\therefore$  设  $B(2, m) (m>0)$ , 直线  $OA$  的表达式为  $y=kx$ , 则  $5k=5$ , 解得  $k=1$ ,  $\therefore$  直线  $OA$  的表达式为  $y=x$ . 设直线  $OA$  与抛物线对称轴交于点  $H$ , 则  $H(2, 2)$ ,  $\therefore BH=|m-2|$ .



图(1)

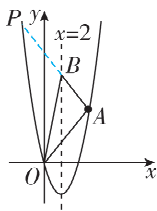
$\therefore S_{\triangle OAB} = 15$ ,  $\therefore \frac{1}{2} \times |m-2| \times 5 = 15$ , 解得  $m=8$

或  $m=-4$  (舍去),  $\therefore$  点  $B$  的坐标为  $(2, 8)$ .

②设直线  $AB$  的表达式为  $y=cx+d$ . 把  $A(5, 5), B(2, 8)$  代入得

$$\begin{cases} 5c+d=5, \\ 2c+d=8, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} c=-1, \\ d=10, \end{cases}$$

$\therefore$  直线  $AB$  的表达式为  $y=-x+10$ .



图(2)

如图(2), 当  $PA-PB$  的值最大时, 点  $A, B, P$  在同一条直线上.

$\because P$  是抛物线上的动点,  $\therefore$  联立  $\begin{cases} y=-x+10, \\ y=x^2-4x, \end{cases}$

$$\text{解得} \begin{cases} x_1=-2, \\ x_2=5, \end{cases} \begin{cases} y_1=12, \\ y_2=5 \end{cases} \text{ (舍去)}, \therefore P(-2, 12).$$

2. 【解】(1)  $\because$  二次函数  $y=x^2+bx+c$  的图象与  $y$  轴交于点  $A(0, 3)$ , 与  $x$  轴交于点  $B(1, 0)$ 、点  $E$ ,  $\therefore$  将点  $A$ 、点  $B$  的坐标分别代入, 得

$$\begin{cases} c=3, \\ 1+b+c=0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} c=3, \\ b=-4, \end{cases} \therefore \text{抛物线的表达式为}$$

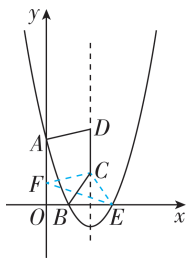
$$y=x^2-4x+3.$$

(2) 令  $y=x^2-4x+3$  中  $y=0$ , 则  $x^2-4x+3=0$ , 解得  $x_1=1, x_2=3$ ,  $\therefore E(3, 0)$ . 又  $\because$  点  $A(0, 3)$ , 点  $B(1, 0)$ ,  $\therefore BE=2, AO=3$ ,  $\therefore \triangle ABE$  的面积 =

$$\frac{1}{2} \times BE \cdot AO = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3.$$

(3)  $\because CD=BE$ ,  $\therefore CD=2$ . 如图, 将点  $A$  沿  $y$  轴向下平移 2 个单位, 得到点  $F$ , 连接  $CE, CF, EF$ ,  $\therefore AF=2$ .

$\because CD=2$ ,  $\therefore AF=CD$ .  $\because$  抛物线的对称轴  $\parallel y$  轴, 且线段



### 关键点拨

(3) 本题是“造桥选址”与“将军饮马”的综合, 先平移, 再找对称点, 然后再求坐标.

### 关键点拨

(2) ②当  $P, B, A$  共线时,  $PA-PB$  的值最大.

### 思路分析

(1) 把点  $C$  的坐标代入表达式求出  $c$  的值, 再令  $y=0$  即可求出点  $A$  的坐标;

(2) 过  $P$  作  $PE \perp AC$  于点  $E$ , 过  $P$  作  $PF \perp x$  轴交  $AC$  于点  $H$ , 交  $x$  轴于点  $F$ , 证明  $\triangle PHE$  是等腰直角三角形, 求得  $PE = \frac{\sqrt{2}}{2} PH$ , 当  $PH$  最大时,  $PE$  最大, 运用待定系数法求出直线  $AC$  的表达式为  $y=x+5$ , 设  $P(m, -m^2-4m+5) (-5 < m < 0)$ , 则  $H(m, m+5)$ , 求得  $PH$  的长, 再根据二次函数的性质求解即可.

$CD$  在抛物线的对称轴上, 线段  $AF$  在  $y$  轴上,  $\therefore CD \parallel AF$ ,  $\therefore$  四边形  $CDAF$  是平行四边形,  $\therefore AD=CF$ .  $\because$  抛物线是轴对称图形,  $\therefore BC=CE$ ,  $\therefore AD+BC=CF+CE \geq EF$ ,  $\therefore$  当  $F, C, E$  三点共线, 即点  $C$  是  $EF$  与抛物线对称轴的交点时,  $AD+BC$  的值最小.  $\because A(0, 3)$ , 由平移的性质可得点  $F$  的纵坐标为  $3-2=1$ ,  $\therefore F(0, 1)$ .

设直线  $EF$  的表达式为  $y=kx+t$ , 将点  $E, F$  的坐标分别代入, 得  $\begin{cases} 3k+t=0, \\ t=1, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} k=-\frac{1}{3}, \\ t=1, \end{cases} \therefore$  直线

$EF$  的表达式为  $y=-\frac{1}{3}x+1$ . 抛物线  $y=x^2-4x+3$  的对称轴为直线  $x=-\frac{-4}{2 \times 1}=2$ , 当  $y=-\frac{1}{3}x+1$

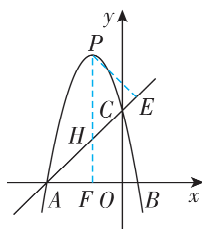
中  $x=2$  时,  $y=\frac{1}{3}$ ,  $\therefore C(2, \frac{1}{3})$ .

### 大招解读 | 代数法求线段最值

二次函数图象中求平行于坐标轴的线段最值问题时, 常用代数法: 设出动点坐标, 利用坐标表示出线段长度, 构造二次函数, 利用二次函数的性质求最值.

3. 【解】(1)  $\because$  点  $C(0, 5)$  在抛物线  $y=-x^2-4x+c$  上,  $\therefore c=5$ ,  $\therefore y=-x^2-4x+5$ , 令  $y=0$ , 得  $0=-x^2-4x+5$ , 解得  $x=1$  或  $-5$ ,  $\therefore$  点  $A$  的坐标为  $(-5, 0)$ .

(2) 由(1)知,  $B(1, 0)$ . 过  $P$  作  $PE \perp AC$  于点  $E$ , 过  $P$  作  $PF \perp x$  轴交  $AC$  于点  $H$ , 交  $x$  轴于点  $F$ , 如图.



$\because A(-5, 0), C(0, 5)$ ,  $\therefore OA=OC$ ,  $\therefore \triangle AOC$  是等腰直角三角形,  $\therefore \angle CAO=45^\circ$ .

$\because PF \perp x$  轴,  $\therefore \angle AHF=45^\circ = \angle PHE$ ,  $\therefore \triangle PHE$  是等腰直角三角形,  $\therefore PE=EH$ ,

$$\therefore PH^2 = PE^2 + EH^2 = 2PE^2, \therefore PE = \frac{PH}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} PH,$$

$\therefore$  当  $PH$  最大时,  $PE$  最大.

设直线  $AC$  的表达式为  $y=kx+5$ , 将  $A(-5, 0)$  代入得  $0=-5k+5$ ,  $\therefore k=1$ ,  $\therefore$  直线  $AC$  的表达式为  $y=x+5$ . 设  $P(m, -m^2-4m+5) (-5 < m < 0)$ , 则  $H(m, m+5)$ ,  $\therefore PH = (-m^2-4m+5) - (m+5) = -\left(m+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$ .

$\because -1 < 0$ ,  $\therefore$  当  $m=-\frac{5}{2}$  时,  $PH$  取得最大值, 为