

$\frac{25}{4}$, $\therefore PE = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{25}{4} = \frac{25\sqrt{2}}{8}$, $\therefore$ 点 P 到直线 AC 距离的最大值为 $\frac{25\sqrt{2}}{8}$.

4. 【解】(1) 将 $A(1, 0)$, $B(-6, 0)$ 分别代入 $y = x^2 + bx + c$, 得 $\begin{cases} 0 = 1 + b + c, \\ 0 = 36 - 6b + c, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b = 5, \\ c = -6, \end{cases} \therefore$ 抛物线的表达式为 $y = x^2 + 5x - 6$.

(2) 如图, 过点 P 作 $PH \parallel y$ 轴交直线 BC 于 H . $\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = x^2 + 5x - 6$, $\therefore C(0, -6)$, 对称轴为直线 $x = -\frac{5}{2}$,

$\therefore OC = 6$. $\therefore B(-6, 0)$, $\therefore OB = 6$, $\therefore OB = OC$.

$\therefore \angle BOC = 90^\circ$, $\therefore \triangle BOC$ 是等腰直角三角形, $\therefore \angle OCB = 45^\circ$.

$\therefore PH \parallel y$ 轴, $\therefore \angle PHC = \angle OCB = 45^\circ$.

$\therefore PE \perp BC$, $\therefore \triangle PHE$ 是等腰直角三角形,

$\therefore PE = EH$, $\therefore PH = \sqrt{HE^2 + PE^2} = \sqrt{2}PE$.

设直线 BC 的表达式为 $y = kx + m$, 则 $\begin{cases} 0 = -6k + m, \\ -6 = m, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = -1, \\ m = -6, \end{cases} \therefore$ 直线 BC 的表达式为 $y = -x - 6$.

设点 $P(p, p^2 + 5p - 6)$, 则 $H(p, -p - 6)$,

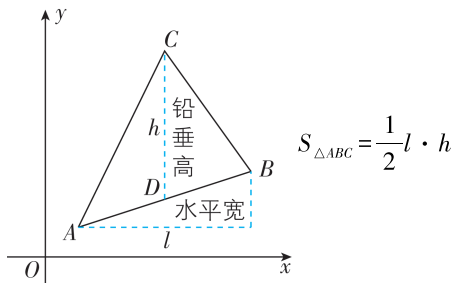
$\therefore PD = 2\left(-\frac{5}{2} - p\right) = -5 - 2p$, $PH = -p - 6 - (p^2 + 5p - 6) = -p^2 - 6p$,

$\therefore PD + \sqrt{2}PE = PD + PH = -5 - 2p + (-p^2 - 6p) = -(p^2 + 8p) - 5 = -(p + 4)^2 + 11$,

$\therefore$ 当 $p = -4$ 时, $PD + \sqrt{2}PE$ 有最大值, 最大值为 11, 此时点 P 的坐标为 $(-4, -10)$.

大招解读 | 铅垂法巧求面积最值

铅垂法是一种求三角形面积的特殊方法, 主要解决的是斜三角形面积问题. 具体公式为三角形面积等于水平宽和铅垂高乘积的一半. 三角形的水平宽指的是两个顶点之间的水平距离, 而铅垂高是指从一个顶点到对边的铅垂高度.



结论证明 5. 【解】(1) 设 $y = a(x+1)(x-6)$ ($a \neq 0$).

证明: 如图,

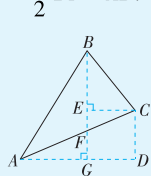
$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle BCF}$$

$$= \frac{1}{2} BF \cdot AG + \frac{1}{2} BF \cdot EC$$

$$= \frac{1}{2} BF \cdot (AG + EC)$$

$$= \frac{1}{2} BF \cdot (AG + GD)$$

$$= \frac{1}{2} BF \cdot AD.$$



关键点拨

解题的关键是正确表示出两个三角形面积的比.

把 $B(5, -6)$ 代入, 得 $a(5+1)(5-6) = -6$, 解得 $a = 1$, $\therefore y = (x+1)(x-6) = x^2 - 5x - 6$.

(2) 如图, 连接 AP, BP , 过点 P 作 $PD \perp x$ 轴于点 D , 交 AB 于点 E .

由 $A(-1, 0)$, $B(5, -6)$, 易得直线 AB 的表达式为 $y = -x - 1$.

设 $P(m, m^2 - 5m - 6)$ ($-1 < m < 5$), 则 $E(m, -m - 1)$, $\therefore PE = (-m - 1) - (m^2 - 5m - 6) = -m^2 + 4m + 5$,

$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} PE \cdot (x_B - x_A) = \frac{1}{2} (-m^2 + 4m + 5) \times 6 = -3(m - 2)^2 + 27$,

$\therefore$ 当 $m = 2$ 时, $S_{\triangle ABP}$ 最大, 此时 $P(2, -12)$.

6. 【解】(1) $\therefore$ 抛物线 $y = x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$, $\therefore C(2, -4)$. $\therefore$ 直线 $y = x$ 与抛物线在第一象限的交点为点 B , $\therefore$ 联立得 $\begin{cases} y = x, \\ y = x^2 - 4x, \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} x = 5, \\ y = 5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$ (舍去), $\therefore B(5, 5)$. 故点 B 和点 C 的坐标分别为 $(5, 5)$ 和 $(2, -4)$.

(2) $\therefore$ 点 $B(5, 5)$ 与点 E 关于对称轴 $x = 2$ 对称, $\therefore E(-1, 5)$. 如图, 分别过点 E, F 作 y 轴的平行线, 交直线 OB 于点 M, N , $\therefore M(-1, -1)$, $\therefore EM = 6$.

设 $F(m, m^2 - 4m)$ ($0 < m < 5$), 则 $N(m, m)$, $\therefore FN = m - (m^2 - 4m) = -m^2 + 5m$.

$\therefore S_1 = \frac{1}{2} FN(x_B - x_C)$, $S_2 = \frac{1}{2} EM(x_B - x_C)$,

$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{FN}{EM} = \frac{-m^2 + 5m}{6} = -\frac{1}{6}(m^2 - 5m) = -\frac{1}{6}\left(m - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{24}$.

$\therefore -\frac{1}{6} < 0$, $\therefore$ 当 $m = \frac{5}{2}$ 时, $\frac{S_1}{S_2}$ 取最大值, 为 $\frac{25}{24}$.

6.2~6.3 综合训练

刷综合

1. B 【解析】抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ 关于 y 轴对

称的抛物线为 $y = \frac{1}{2}(-x)^2 + (-x) - 4 = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$.

4. $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 向下平移 2 个单位长度后所得抛物线的表达式为 $y = ax^2 + bx + c - 2$, $\therefore b = -1, c - 2 = -4$, 解得 $c = -2$. 故选 B.

2. A 【解析】 $\because y = mx^2 + 2mx + n (m < 0)$, $\therefore$ 抛物线

的对称轴为直线 $x = -\frac{2m}{2m} = -1$, 抛物线开口向下, $\therefore$ 离对称轴越近, 函数值越大. $\because A(-3, y_1), B(-2, y_2), C(2, y_3), D(4, y_4), A, B, C, D$ 到对称轴的距离分别为 $|-3 - (-1)| = 2, |-2 - (-1)| = 1, |2 - (-1)| = 3, |4 - (-1)| = 5$, $\therefore y_2 > y_1 > y_3 > y_4$. A 选项, 当 $y_3 y_4 < 0$ 时, 则 $y_3 > 0, y_4 < 0$, $\therefore y_1 > 0, y_2 > 0$, $\therefore y_1 y_2 > 0$ 成立, 故该选项符合题意. B 选项, 若 $y_1 y_4 > 0$, 则当 $y_1 > 0, y_4 > 0$ 时, $y_2 > 0, y_3 > 0$, 此时 $y_2 y_3 > 0$ 成立; 当 $y_1 < 0, y_4 < 0$ 时, $y_3 < 0, y_2$ 的符号不确定, 此时 $y_2 y_3 > 0$ 不一定成立, 故该选项不符合题意. C 选项, 若 $y_2 y_4 < 0, y_2 > 0, y_4 < 0$, 故 y_1 和 y_3 的符号不确定, 则 $y_1 y_3 < 0$ 不一定成立, 故该选项不符合题意. D 选项, 若 $y_1 y_2 > 0$, 则当 $y_1 > 0, y_2 > 0$ 时, y_3 和 y_4 的符号不确定, 此时 $y_3 y_4 > 0$ 不一定成立; 当 $y_1 < 0, y_2 < 0$ 时, $y_3 < 0, y_4 < 0$, 此时 $y_3 y_4 > 0$ 成立, 故该选项不符合题意. 故选 A.

3. B 【解析】 $\because y = x^2 - 2mx + n = (x - m)^2 - m^2 + n$, $\therefore$ 顶点 P 为 $(m, n - m^2)$. 设直线 AB 的表达式为 $y = kx + b$. 把 $A(4, 0), B(0, 2)$ 分别代入可得

$$\begin{cases} 0 = 4k + b, \\ 2 = b, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = -\frac{1}{2}, \\ b = 2, \end{cases} \text{ 所以直线 } AB \text{ 的表达式为 } y = -\frac{1}{2}x + 2. \therefore \text{ 二次函数图象的顶点 } P \text{ 在}$$

线段 AB 上, $\therefore n - m^2 = -\frac{1}{2}m + 2$, 且 $0 \leq m \leq 4$, $\therefore n = m^2 - \frac{1}{2}m + 2 = \left(m - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}$, $\therefore$ 当 $m = \frac{1}{4}$ 时, n 取最小值, 为 $\frac{31}{16}$. 故选 B.

4. C 【解析】如图, 过 O 点

作 $OM \perp AB$ 于 M .

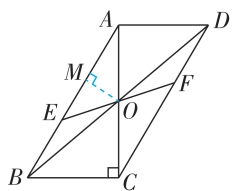
$\because AC \perp BC, \angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 30^\circ. \because BC = 4$,

$\therefore AB = 8, \therefore AC =$

$\sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}. \therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边

形, AC, BD 交于点 $O, \therefore AO = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{3}$,



关键点拨

先确定二次函数图象的对称轴与开口方向, 根据各点到对称轴的距离判断出函数值的大小关系是解题的关键.

思路分析

过 O 点作 $OM \perp AB$ 于 M , 根据含 30° 角的直角三角形的性质和勾股定理得出 $AB = 8, AC = 4\sqrt{3}$, 根据平行四边形的性质得出 $AO = 2\sqrt{3}$, 再求出 OM, AM 的长, 用含 x 的式子表示 EM 的长, 由 $OE^2 = OM^2 + EM^2$ 得到 y 关于 x 的函数表达式, 结合自变量的取值范围求解即可.

$$\therefore OM = \frac{1}{2}AO = \sqrt{3}, \therefore AM = \sqrt{AO^2 - OM^2} = 3.$$

$$\because BE = x, \therefore EM = AB - AM - BE = 8 - 3 - x = 5 - x.$$

$$\because OE^2 = EM^2 + OM^2, OE^2 = y, \therefore y = (x - 5)^2 + 3,$$

$\therefore y$ 关于 x 的函数图象是一条抛物线, 由题意得 $0 \leq x \leq 8$, 当 $x = 8$ 时, $y = 12$, 故符合表达式的函数图象为选项 C. 故选 C.

5. C 【解析】将 $(2, 0)$ 代入抛物线 $y = ax^2 - \frac{10}{3}x + 4$

$$\text{与直线 } y = \frac{4}{3}x + b, \text{ 可得 } a = \frac{2}{3}, b = -\frac{8}{3}. \text{ 设点}$$

$$M \text{ 的横坐标为 } m, \text{ 则 } M\left(m, \frac{2}{3}m^2 - \frac{10}{3}m + 4\right),$$

$$N\left(m, \frac{4}{3}m - \frac{8}{3}\right). \text{ 联立 } \begin{cases} y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + 4, \\ y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}, \end{cases} \text{ 可得}$$

$$\text{点 } B \text{ 的坐标为 } (5, 4). \text{ 对于 } y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + 4, \text{ 令}$$

$$x = 0, \text{ 可得 } y = 4, \therefore C(0, 4). \therefore A(2, 0), \therefore \text{ 易知}$$

$$AB = BC = 5, \text{ 则 } \angle CAB = \angle ACB, \therefore \triangle ABC \text{ 是等}$$

$$\text{腰三角形. A 选项, 当 } MN \text{ 与抛物线的对称轴}$$

$$\text{重合时, 点 } M, N \text{ 的坐标分别为 } \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{6}\right),$$

$$\left(\frac{5}{2}, \frac{2}{3}\right), \therefore \text{ 易得 } BN = \frac{25}{6}, MN = \frac{5}{6}, \therefore BN +$$

$$MN = 5 = AB, \text{ 故本选项错误. B 选项, } \because BC \parallel x$$

$$\text{轴 } (B, C \text{ 两点纵坐标相同}), \therefore \angle BAE =$$

$$\angle CBA, \text{ 而 } \triangle ABC \text{ 是等腰三角形, 不是等边三}$$

$$\text{角形, } \angle CBA \neq \angle BAC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BAE \text{ 不成}$$

$$\text{立, 故本选项错误. C 选项, 如图, 作 } AD \perp$$

$$BC, BF \perp AC. \because AB =$$

$$BC, \therefore BF \text{ 是 } \angle ABC \text{ 的}$$

$$\text{平分线. 易证 } \angle CAD = \angle ABF = \frac{1}{2} \angle ABC, \text{ 而}$$

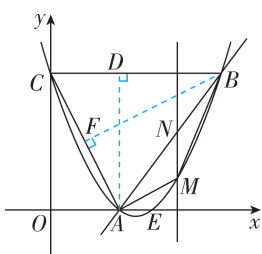
$$\angle ACB - \angle ANM = \angle CAB - \angle DAN = \angle CAD =$$

$$\frac{1}{2} \angle ABC, \text{ 故本选项正确. D 选项, } S_{\text{四边形 } ACBM} =$$

$$S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABM}, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10, S_{\triangle ABM} =$$

$$\frac{1}{2} MN \cdot (x_B - x_A) = \frac{3}{2} \times \left[\left(\frac{4}{3}m - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{2}{3}m^2 - \right. \right.$$

$$\left. \frac{10}{3}m + 4 \right) \Big] = -m^2 + 7m - 10 = -\left(m - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}, \text{ 其}$$



最大值为 $\frac{9}{4}$, 故 $S_{\text{四边形ACBM}}$ 的最大值为 $10 + \frac{9}{4} =$

12.25, 故本选项错误. 故选 C.

6. $y = \frac{3}{4}x^2 + 3x + 3$ 或 $y = \frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图象与坐标轴共有两个交点, 且这两个交点到原点的距离分别为 2 和 3, $\therefore$ 二次函数的图象与坐标轴的交点为 $(0, c)$, $(-\frac{b}{2a}, 0)$. $\because$ 对称轴在 y 轴左侧, $a > 0$, $\therefore b > 0, c > 0$. $\because$ 这两个交点到原点的距离分别为 2 和 3, $\therefore$ 当 $-\frac{b}{2a} = -2, c = 3$ 时, $4a - 2b + 3 = 0$, 解得 $a = \frac{3}{4}, b = 3$, $\therefore y = \frac{3}{4}x^2 + 3x + 3$; 当 $-\frac{b}{2a} = -3, c = 2$ 时, $9a - 3b + 2 = 0$, 解得 $a = \frac{2}{9}, b = \frac{4}{3}$, $\therefore y = \frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$. 故答案为 $y = \frac{3}{4}x^2 + 3x + 3$ 或 $y = \frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$.

7. $\frac{10}{3}$ 【解析】由点 $A(x_1, y_1)$ 在抛物线 $y = -x^2 + 2x$ 上, 得 $y_1 = -x_1^2 + 2x_1$, 由点 $B(x_1 + t, y_1 + h)$ 在抛物线 $y = -x^2 + 4x$ 上, 得 $y_1 + h = -(x_1 + t)^2 + 4(x_1 + t) = -x_1^2 - 2tx_1 + 4x_1 - t^2 + 4t$, 即 $-x_1^2 + 2x_1 + h = -x_1^2 - 2tx_1 + 4x_1 - t^2 + 4t$, 则 $h = -(2t - 2)x_1 - t^2 + 4t$. 又 $\because x_1 = t - 1$, $\therefore h = -(2t - 2)(t - 1) - t^2 + 4t = -3t^2 + 8t - 2 = -3(t - \frac{4}{3})^2 + \frac{10}{3}$, $\therefore$ 当 $t = \frac{4}{3}$ 时, h 取最大值, 最大值为 $\frac{10}{3}$. 故答案为 $\frac{10}{3}$.

8. ①②③ 【解析】选取①②③时, 由②和③可知函数图象与 x 轴的交点为 $(-1, 0)$ 和 $(9, 0)$, 可得二次函数图象的对称轴为直线 $x = \frac{-1+9}{2} = 4$, 故条件①为冗余条件, 因此, 这三个条件只相当于给出了两个独立条件, 可设函数表达式为 $y = a(x+1)(x-9)$, 但无法确定 a 的值, 故无法确定函数表达式, 符合题意. 选取①②④时, 设二次函数表达式为 $y = a(x-4)^2 + k$, 根据题意, 得 $\begin{cases} 0 = a(-1-4)^2 + k, \\ 3 = a(0-4)^2 + k, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{3}, \\ k = \frac{25}{3}, \end{cases} \text{ 故抛物线表达式为 } y = -\frac{1}{3}(x-4)^2 + \frac{25}{3}$$

关键点拨

设点 $M(m, \frac{1}{4}m^2)$, 用含 m 的代数式表示 $BM = \frac{1}{4}m^2 + 1$, 可得点 M 到点 B 的距离与点 M 到直线 $y = -1$ 的距离相等, 进而求解.

关键点拨

根据点 A 和点 B 在抛物线上, 并结合 $x_1 = t - 1$, 推导出 h 关于 t 的二次函数表达式, 再利用二次函数的性质求解即可.

$\frac{25}{3}$, 不符合题意. 选取①③④时, 设二次函数

表达式为 $y = a(x-4)^2 + k$, 根据题意, 得

$$\begin{cases} 0 = a(9-4)^2 + k, \\ 3 = a(0-4)^2 + k, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = -\frac{1}{3}, \\ k = \frac{25}{3}, \end{cases} \text{ 故抛物线表达式为 } y = -\frac{1}{3}(x-4)^2 + \frac{25}{3}$$

不符合题意. 选取②③④时, 设二次函数表达式为 $y = a(x+1)(x-9)$, 根据题意, 得 $3 = a(0+1)(0-9)$, 解得 $a = -\frac{1}{3}$, 故抛物线表达式为 $y = -\frac{1}{3}(x-9)(x+1)$, 不符合题意. 故答案为①②③.

9. 6 【解析】设点 M 的横坐标为 m , 则点 $M(m, \frac{1}{4}m^2)$, 即点 M 到 x 轴的距离为 $\frac{1}{4}m^2$, $\therefore$ 点 M 到直线 $y = -1$ 的距离为 $\frac{1}{4}m^2 + 1$. $\therefore BM =$

$$\sqrt{(m-0)^2 + (\frac{1}{4}m^2 - 1)^2} = \frac{1}{4}m^2 + 1, \therefore \text{点 } M \text{ 到点 } B \text{ 的距离与点 } M \text{ 到直线 } y = -1 \text{ 的距离相等.}$$

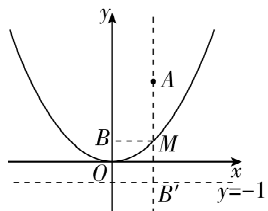
$\therefore$ 点 A 的横坐标为 $x = 3$, $\therefore$ 当点 M 为直线 $x = 3$ 与抛物线的交点

时, $AM + BM$ 最小, 如图. 直线 $x = 3$ 与直线 $y = -1$ 的交点为 $B'(3, -1)$, $\therefore AM + BM$ 的最小值为 AB' , $AB' =$

$$5 - (-1) = 6. \text{ 故答案为 } 6.$$

10. ①②③④ 【解析】由二次函数图象可知 $a > 0, c < 0$. $\therefore$ 该二次函数图象的对称轴为直线 $x = -1$, $\therefore -\frac{b}{2a} = -1$, $\therefore b = 2a > 0$, $\therefore abc < 0$, 故

①正确. 由图象可知, 当 $x = 1$ 时, $y > 0$, 即 $a + b + c > 0$. $\because b = 2a$, $\therefore 3a + c > 0$, 故②正确. 当 $x = -1$ 时, y 取得最小值, $\therefore am^2 + bm + c \geq a - b + c$, 即 $am^2 + b(m+1) \geq a$, 故③正确. 当 $x = -1$ 时, $y = a - b + c$, $\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(-1, a - b + c)$. 将抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 位于 x 轴下方的部分向上翻折, $\therefore$ 翻折后的图象的顶点坐标为 $(-1, -a + b - c)$. $\therefore$ 关于 x 的方程 $|ax^2 + bx + c| - k = 0$ 恰有三个解, $\therefore$ 函数 $y = |ax^2 + bx + c|$ 的图象与直线 $y = k$ 恰有三个交点, $\therefore$ 直线 $y = k$ 恰好经过向上翻折后的图象



的顶点, $\therefore k=b-a-c$. $\because b=2a, \therefore a-c=k$, 故④正确. 综上可知正确的结论为①②③④, 故答案为①②③④.

11. $(-2, 2)$ 或 $(1, 5)$ 【解析】如图, 过点 A 作

$AD \perp x$ 轴, 交 x 轴于点 E , 交直线 $y=x$ 于点 D , 连接 BD , 交 y 轴于点 F . $\because A, B$ 关于直线 $y=x$ 对称, 设 $A(a, b), \therefore B(b, a), \therefore$ 易知 $\triangle ABD$ 是等腰直角三角形.

$\therefore AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, \therefore 4\sqrt{2} = \sqrt{(b-a)^2 + (a-b)^2}, (4\sqrt{2})^2 = (b-a)^2 + (b-a)^2, 32 = 2(b-a)^2, (b-a)^2 = 16, b-a=4$ 或 $b-a=-4$ (舍去), $\therefore b=a+4$. 又 $\because A(a, b)$ 在函数 $y=-x^2+6$ 的图象上, $\therefore b=-a^2+6$, 即 $a+4=-a^2+6$, 整理, 得 $a^2+a-2=0$, 解得 $a_1=-2, a_2=1$. 当 $a=-2$ 时, $b=a+4=-2+4=2, \therefore$ 点 A 的坐标为 $(-2, 2)$; 当 $a=1$ 时, $b=a+4=1+4=5, \therefore$ 点 A 的坐标为 $(1, 5)$. 故答案为 $(-2, 2)$ 或 $(1, 5)$.

12. 【解】(1) 由题意可知, 抛物线 $y=2x^2-3x$ 的“关联抛物线”为 $y=-3x^2+2x$, 故答案为 $y=-3x^2+2x$.

(2) 由题意可知, 抛物线 $y=mx^2+nx (m>0)$ 的“关联抛物线”为 $y=nx^2+mx (n<0)$, 抛物线 $y=mx^2+nx (m>0)$ 的顶点坐标为 $\left(-\frac{n}{2m}, \frac{-n^2}{4m}\right)$.

$\therefore$ 抛物线 $y=mx^2+nx (m>0)$, 其顶点到 x 轴的距离为 4, $\therefore \left|\frac{-n^2}{4m}\right|=4, \therefore \frac{-n^2}{4m}=\pm 4$.

$\therefore$ 两条抛物线的形状相同, 开口方向相反, $\therefore m=-n$,

当 $\frac{-n^2}{4m}=4$ 时, 可得 $\frac{-n^2}{-4n}=4$, 解得 $n=16$,

则 $m=-n=-16$ (不符合题意, 舍去);

当 $\frac{-n^2}{4m}=-4$ 时, 可得 $\frac{-n^2}{-4n}=-4$, 解得 $n=-16$,

即 $m=-n=16, \therefore$ 抛物线的表达式为 $y=16x^2-16x$.

(3) 抛物线 $y=mx^2+nx$ 的“关联抛物线”为 $y=nx^2+mx$.

① $\because$ 抛物线 $y=nx^2+mx$ 的顶点坐标为 $\left(-\frac{m}{2n}, \frac{-m^2}{4n}\right), \therefore m \times \left(-\frac{m}{2n}\right) + n \times \left(-\frac{m}{2n}\right) = \frac{-m^2}{4n},$

关键点拨

作垂线构造等腰直角三角形是解题的关键.

思路分析

(2) 先根据新定义得到“关联抛物线”的表达式, 再根据抛物线的顶点到 x 轴的距离为 4, 可得 $\left|\frac{-n^2}{4m}\right|=4$, 最后根据抛物线与它的“关联抛物线”形状相同, 开口方向相反, 可得 $m=-n$, 即可求出 m, n 的值;

(3) ①根据抛物线 $y=mx^2+nx (mn \neq 0, \text{且 } m \neq n)$ 经过其“关联抛物线”的顶点列出等量关系式, 求出 $m=-2n$, 进而可求出抛物线的对称轴; ②分抛物线开口向上和开口向下两种情况求出 m 的值.

整理, 得 $\left(\frac{m}{n}\right)^2 + \frac{m}{n} - 2 = 0$, 解得 $\frac{m}{n} = 1$ 或 $\frac{m}{n} = -2$. $\because m \neq n, \therefore m = -2n, \therefore$ 抛物线 $y=mx^2+nx$ 的对称轴为直线 $x = -\frac{n}{2m} = -\frac{n}{-4n} = \frac{1}{4}$.

② $\because m = -2n, \therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -2nx^2 + nx$, 当 $-2n > 0$, 即 $n < 0$ 时, 抛物线开口向上. $\therefore \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \frac{3}{4} > \frac{1}{4},$

$\therefore$ 当 $x=1$ 时, y 有最大值, 最大值为 $y = -2n + n = -n = 2, \therefore n = -2, \therefore m = -2n = 4$.

当 $-2n < 0$, 即 $n > 0$ 时, 抛物线开口向下, $\therefore$ 当 $x = \frac{1}{4}$ 时, y 有最大值, 最大值为 $y = -2n \times$

$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + n \times \frac{1}{4} = -\frac{n}{8} + \frac{n}{4} = \frac{n}{8} = 2, \therefore n = 16, \therefore m = -2n = -32$.

综上所述, $m=4$ 或 -32 .

13. 【解】(1) 当 $t=1$ 时, $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$.

$\because y=2\ 024x+b, \therefore$ 函数的最大值 $M=3\ 036+b$, 函数的最小值 $N=1\ 012+b, \therefore h = \frac{M-N}{2} =$

$\frac{(3\ 036+b)-(1\ 012+b)}{2} = 1\ 012$.

(2) $\because x>0, \therefore t-\frac{1}{2}>0$, 解得 $t>\frac{1}{2}$.

$\because 2>0, \therefore y$ 随 x 的增大而减小, $\therefore h =$

$\frac{2}{t-\frac{1}{2}} - \frac{2}{t+\frac{1}{2}} = 4$, 解得 $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (舍去),

经检验, $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 是原方程的解, $\therefore t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) 存在实数 k , 使得函数 y 的最大值等于 h 的最小值.

$\because y = -x^2 + 4x + k = -(x-2)^2 + 4 + k, \therefore$ 函数图象的对称轴为直线 $x=2, y$ 的最大值为 $4+k$.

① 当 $2 \leq t - \frac{1}{2}$, 即 $t \geq \frac{5}{2}$ 时, $M = -\left(t - \frac{1}{2} - 2\right)^2 + 4 + k, N = -\left(t + \frac{1}{2} - 2\right)^2 + 4 + k, \therefore h = t - 2$, 此时 h 的最小值为 $\frac{1}{2}$, 则 $\frac{1}{2} = 4 + k$, 解得 $k = -\frac{7}{2}$;

② 当 $t + \frac{1}{2} \leq 2$, 即 $t \leq \frac{3}{2}$ 时, $N = -\left(t - \frac{1}{2} - 2\right)^2 + 4 + k, M = -\left(t + \frac{1}{2} - 2\right)^2 + 4 + k, \therefore h = 2 - t$, 此时 h

的最小值为 $\frac{1}{2}$, 则 $\frac{1}{2} = 4 + k$, 解得 $k = -\frac{7}{2}$;

③当 $t - \frac{1}{2} \leq 2 \leq t$, 即 $2 \leq t \leq \frac{5}{2}$ 时, $N = -\left(t - \frac{1}{2} - 2\right)^2 + 4 + k, M = 4 + k, \therefore h = \frac{1}{2}\left(t - \frac{3}{2}\right)^2$,

$\therefore h$ 的最小值为 $\frac{1}{8}$, 则 $\frac{1}{8} = 4 + k$, 解得 $k = -\frac{31}{8}$;

④当 $t \leq 2 \leq t + \frac{1}{2}$, 即 $\frac{3}{2} \leq t \leq 2$ 时, $N = -\left(t - \frac{1}{2} - 2\right)^2 + 4 + k, M = 4 + k, \therefore h = \frac{1}{2}\left(t - \frac{5}{2}\right)^2$,

$\therefore h$ 的最小值为 $\frac{1}{8}$, 则 $\frac{1}{8} = 4 + k$, 解得 $k = -\frac{31}{8}$.

综上所述, k 的值为 $-\frac{31}{8}$ 或 $-\frac{7}{2}$.

6.4 用二次函数解决问题

课时1 面积问题

刷基础

1. **A** 【解析】设十字形小径的宽为 x m, 花园中的阴影部分的面积为 y m². 由题意得 $y = (20 - x)(14 - x) = x^2 - 34x + 280 = (x - 17)^2 - 9$. $\therefore 0 < x \leq 1$, $\therefore$ 当 $x = 1$ 时, y 有最小值, 此时 $y = (1 - 17)^2 - 9 = 247$. 故选 A.

2. $\frac{3}{2}$ 【解析】由题意得 $AB = CD, AD = EF = BC$. 设 AB 为 x m, 窗框的采光面积为 S m², 则 $CD = AB = x$ m, $BC = AD = EF = \frac{1}{3}(6 - 2x)$ m, $\therefore$ 窗框的采光面积 $S = \frac{1}{3}x(6 - 2x) = -\frac{2}{3}x^2 + 2x = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$. $\therefore -\frac{2}{3} < 0$, $\therefore$ 当 $x = \frac{3}{2}$ 时, S 取最大值为 $\frac{3}{2}$, 即当 AB 为 $\frac{3}{2}$ m 时, 窗框的采光面积最大, 为 $\frac{3}{2}$ m². 故答案为 $\frac{3}{2}$.

3. **C** 【解析】设重建后的花园面积为 S m². 由题图可得, $S = (20 - x)(16 + x) = -(x - 2)^2 + 324$, $\therefore$ 当 $x = 2$ 时, S 取得最大值 324, 故选 C.

4. **B** 【解析】设运动时间为 x s, 四边形 $APQC$ 的面积为 y cm², 则 $AP = x$ cm, $BQ = 2x$ cm, $\therefore BP = (4 - x)$ cm, $\therefore y = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2}BC \cdot AB - \frac{1}{2}BQ \cdot BP$, 即 $y = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2x(4 - x) =$

思路分析

设十字形小径的宽为 x m, 花园中的阴影部分的面积为 y m². 根据平移的性质可得, 花园中的阴影部分可看作是长为 $(20 - x)$ m, 宽为 $(14 - x)$ m 的矩形, 然后进行计算即可解答.

思路分析

(1) 车棚宽度 AB 为 x m, 则每条宽需要用的材料为 $(x - 1)$ 米, 然后根据铝合金材料总长减去三条宽的长度即可表示出 BC 的长, 最后利用长乘宽表示出面积, 结合墙的长度可列出不等式求出自变量的取值范围.

$x^2 - 4x + 16 = (x - 2)^2 + 12$, $\therefore$ 当 $x = 2$ 时, y 有最小值, 为 12, 故选 B.

5. 【解】 $\because AB = x$ 米, $\therefore BC = (26 - x)$ 米.

(1) 由题意得, $x(26 - x) = 168$, 解得 $x_1 = 12$, $x_2 = 14$, $\therefore x$ 的值为 12 或 14.

(2) 由题意知 $\begin{cases} x \geq 6, \\ 26 - x \geq 15, \end{cases}$ 解得 $6 \leq x \leq 11$.

设花园的面积为 S 平方米.

由题意得, $S = AB \cdot BC = x(26 - x) = -x^2 + 26x = -(x - 13)^2 + 169$,

$\therefore$ 抛物线开口向下, 对称轴为直线 $x = 13$, $\therefore$ 当 $6 \leq x \leq 11$ 时, S 随 x 的增大而增大, $\therefore$ 当 $x = 11$ 时, $S_{\text{最大值}} = 165$, 即花园面积的最大值为 165 平方米.

6. 【解】(1) 由题意得 $CD = AB = 18 + 2 - x = 20 - x$, $\therefore y = AB \times BC = x(20 - x) = -x^2 + 20x (0 < x < 18)$.

(2) 当 $x = -\frac{b}{2a} = 10$ 时, $y_{\text{最大}} = 100$, $\therefore$ 当 $x = 10$ 时, 车棚面积最大, 最大面积是 100 m².

刷提升

1. $2\ 400$ 【解析】 $\because$ 四边形 $EFHG$ 是矩形, $\therefore EF \parallel GH, EG = FH$. $\because AD \perp BC, \therefore AD \perp EF, EG = FH = KD, \therefore AK \perp EF$. 设 $EG = FH = KD = x$ mm, 则 $AK = (80 - x)$ mm. $\because EF \parallel GH, \therefore \triangle AEF \sim \triangle ABC, \therefore \frac{EF}{BC} = \frac{AK}{AD}$, 即 $\frac{EF}{120} = \frac{80 - x}{80}$, $\therefore EF = \left(120 - \frac{3}{2}x\right)$ mm, $\therefore S_{\text{矩形}EFHG} = EF \cdot EG = \left(120 - \frac{3}{2}x\right) \cdot x = -\frac{3}{2}x^2 + 120x = -\frac{3}{2}(x - 40)^2 + 2\ 400$, $\therefore$ 当 $x = 40$ 时, 矩形的面积最大, 最大面积是 2 400 mm². 故答案为 2 400.

2. 【解】(1) $\because$ 铝合金材料总长 36 米, 且在两个车棚中间及左右两侧各设置一个 1 米宽的通道 (通道不用铝合金材料), $\therefore BC = 36 - 3(x - 1) = (39 - 3x)$ 米, $\therefore S = x(39 - 3x) = -3x^2 + 39x$.

由 $\begin{cases} 0 < x - 1, \\ 0 < 39 - 3x \leq 25, \end{cases}$ 解得 $\frac{14}{3} \leq x < 13$.

$\therefore S$ 与 x 之间的函数关系式为 $S = -3x^2 + 39x$,

自变量 x 的取值范围是 $\frac{14}{3} \leq x < 13$.

(2) S 不总随 x 的增大而增大. 理由如下:

由 (1) 得 $\frac{14}{3} \leq x < 13$.

$\therefore S = -3x^2 + 39x$, 其图象的对称轴为直线 $x =$

$-\frac{39}{2 \times (-3)} = \frac{13}{2}$, 且开口向下, $\therefore S$ 不总是随 x 的增大而增大, 当 $\frac{14}{3} \leq x < \frac{13}{2}$ 时, S 随 x 的增大而增大; 当 $\frac{13}{2} \leq x < 13$ 时, S 随 x 的增大而减小.

刷素养

3. 【解】(1) 方案①: 由题意得 $BC = (120 - x)$ 厘米

米, $\therefore y = \frac{1}{2}x(120 - x) = -\frac{1}{2}x^2 + 60x = -\frac{1}{2}(x - 60)^2 + 1800$, $\therefore$ 当 $x = 60$ 时, y 取得最大值, 最大值为 1800.

方案②: 如图, 过点 B 作 $BE \perp AD$ 于 E , 过点 C 作 $CF \perp AD$ 于 F . 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $\therefore \angle ABE = \angle DCF = 30^\circ$.

设 $AB = CD = a$ 厘米, 等腰梯形 $ABCD$ 的面积为 S 平方厘米, 则 $BC = EF = (120 - 2a)$ 厘米.

又 $\because \angle ABE = \angle DCF = 30^\circ$, $\therefore AE = DF = \frac{1}{2}a$ 厘米,

米, $\therefore BE = CF = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ 厘米, $AD = (120 - a)$ 厘米,

$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a(120 - 2a + 120 - a) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 + 60\sqrt{3}a$

$\sqrt{3}a = -\frac{3\sqrt{3}}{4}(a - 40)^2 + 1200\sqrt{3}$,

$\therefore$ 当 $a = 40$ 时, S 有最大值, $S_{\text{最大值}} = 1200\sqrt{3}$.

$\because 1200\sqrt{3} > 1800$, $\therefore S_{\text{最大值}} > y_{\text{最大值}}$.

(2) 由 (1) 的结果大致可推断出折的边数越多, 横截面面积越大, 因此折的边数无限多, 即折的图形为半圆时, 横截面面积最大.

课时 2 高度问题与拱形问题

刷基础

1. A 【解析】 $y = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{10}{9} = -\frac{2}{9}(x - 2)^2 +$

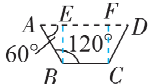
2. $\because -\frac{2}{9} < 0$, $\therefore$ 当 $x = 2$ 时, y 取得最大值 2,

$\therefore$ 羽毛球行进的最大高度为 2 米, 故选 A.

2. 2.5 【解析】设 y 轴右侧的抛物线表达式为 $y = a(x - 1)^2 + 1.44$. 将 $A(0, 0.8)$ 代入, 得 $a \times (0 - 1)^2 + 1.44 = 0.8$, 解得 $a = -0.64$, $\therefore y$ 轴右侧的抛物线表达式为 $y = -0.64(x - 1)^2 + 1.44$. 当 $y = 0$ 时, $-0.64(x - 1)^2 + 1.44 = 0$, 解得 $x_1 =$

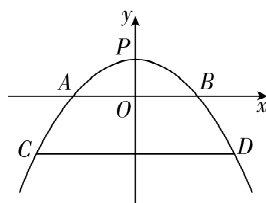
关键点拨

(1) 方案②: 过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E , 过点 C 作 $CF \perp AD$ 于 F , 推出 $\angle ABE = \angle DCF = 30^\circ$ 是解题的关键.



2. 5, $x_2 = -0.5$ (舍去), $\therefore$ 水池的半径至少为 2.5 米. 故答案为 2.5.

3. C 【解析】如图是抛物线形帐篷的示意图及所建立的平面直角坐标系. $\because$ 抛物线最高点 P 到 AB 的距离为 0.6 m, $AB = 2$ m, $CD = 4$ m, $\therefore P(0, 0.6)$, $B(1, 0)$. 设 $y = ax^2 + 0.6$. 将 $B(1, 0)$ 代入得, $0 = a + 0.6$, $\therefore a = -0.6$, 即 $y = -0.6x^2 + 0.6$, 当 $x = \frac{1}{2}CD = 2$ 时, $y = -0.6 \times 2^2 + 0.6 = -1.8$. 即点 B 到 CD 的距离为 1.8 m. 故选 C.



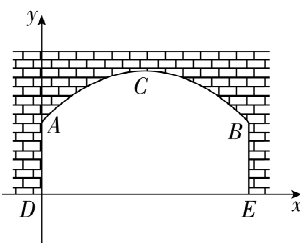
4. 40 【解析】如图, 以 AB 所在的直线为 x 轴, 线段 AB 的垂直平分线所在的直线为 y 轴建立平面直角坐标系, 坐标原点为点 O , $\therefore A(-40, 0)$, $E(0, 200)$. 设抛物线的表达式为 $y = ax^2 + 200$, 将 $A(-40, 0)$ 代入, 得 $0 = a \times$

$(-40)^2 + 200$, 解得 $a = -\frac{1}{8}$, $\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -\frac{1}{8}x^2 + 200$. 将 $y = 150$ 代入 $y = -\frac{1}{8}x^2 +$

200, 得 $-\frac{1}{8}x^2 + 200 = 150$, 解得 $x = \pm 20$,

$\therefore C(-20, 150)$, $D(20, 150)$, $\therefore CD = 20 - (-20) = 40$ (m).

5. 【解】(1) 如图, 以 D 为原点, DE 所在直线为 x 轴, DA 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系 (建系方法不唯一).



$\therefore DE = 10$, $AD = BE = 3.5$, $\therefore B(10, 3.5)$, $x_C = \frac{10}{2} = 5$, $A(0, 3.5)$.

$\therefore$ 隧道的最高点 C 到地面 DE 的距离为 6 米, $\therefore C(5, 6)$.

关键点拨

将问题转化为求 y 轴右侧的抛物线与 x 轴正半轴的交点的横坐标是解题关键.

设抛物线 ACB 的表达式为 $y=a(x-5)^2+6$, 将 $A(0, 3.5)$ 代入, 得 $3.5=a(0-5)^2+6$, 解得 $a=-\frac{1}{10}$, $\therefore$ 抛物线 ACB 的表达式为 $y=-\frac{1}{10}(x-5)^2+6$.

(2) $\because$ 右侧车道线与墙面的距离为 1 米, $\therefore$ 右侧车道线的横坐标为 $10-1=9$.

将 $x=9$ 代入 $y=-\frac{1}{10}(x-5)^2+6$, 得 $y=-\frac{1}{10}\times(9-5)^2+6=-1.6+6=4.4$.

$\because$ 车辆顶部与隧道顶部 ACB 在竖直方向的空隙不小于 0.3 米,

$\therefore h=4.4-0.3=4.1\approx 4$ (米), 即最大安全限高 h 的值为 4 米.

刷提升

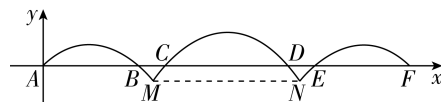
1. **B** 【解析】 $\because$ 点 $A(0, 1.5)$ 在抛物线 $y=a(x-1)^2+2$ 上, $\therefore 1.5=a(0-1)^2+2$, $\therefore a=-\frac{1}{2}$, $\therefore$ 第一次着地前对应的抛物线表达式为 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$. 当 $y=0$ 时, $-\frac{1}{2}(x-1)^2+2=0$, $\therefore x=3$ 或 $x=-1$ (舍去), $\therefore$ 点 B 的坐标为 $(3, 0)$. $\because$ 着地前后对应的两条抛物线的形状相同, 且着地后弹起的最大高度是着地前的最大高度的 $\frac{1}{4}$, $\therefore$ 设第一次着地后对应的抛物线表达式为 $y=-\frac{1}{2}(x-h)^2+\frac{1}{2}$, 将点 $B(3, 0)$ 代入该表达式, 得 $-\frac{1}{2}(3-h)^2+\frac{1}{2}=0$, 解得 $h_1=4, h_2=2$ (舍去), $\therefore$ 第一次着地后对应的抛物线表达式为 $y=-\frac{1}{2}(x-4)^2+\frac{1}{2}$, 该抛物线的对称轴为直线 $x=4$. 又 $\because$ 点 B 的横坐标为 3, $\therefore$ 点 C 的横坐标为 5, $\therefore$ 点 $C(5, 0)$, $\therefore$ 弹力球第二次着地点到点 O 的距离为 5 m. $\because$ 圆柱形水桶的高为 0.42 m, $\therefore$ 当 $y=0.42$ 时, $-\frac{1}{2}(x-4)^2+\frac{1}{2}=0.42$, 解得 $x_1=3.6$ (舍去), $x_2=4.4$. $\therefore$ 水桶的底面半径为 0.3 m, 水桶的最左端距离原点 s 米, $\therefore s$ 的取值范围为 $4.4-0.6\leq s\leq 4.4$, 即 $3.8\leq s\leq 4.4$. 故选 B.

2. 0.5 108 【解析】根据题意得小张的步长为 $\frac{270}{540}=0.5$ (米). 以点 A 为原点, AF 所在直线

思路分析

(3) 设圆弧所在圆的圆心为点 O , 水面宽度为 AB , 连接 OA , 过点 O 作 $ON\perp AB$ 于点 C , 交圆弧于点 N , 根据垂径定理, 得 $AC=CB=\frac{1}{2}AB=10$ m. 设圆的半径为 r m, 则 $OA=r$ m, $OC=(r-5)$ m, 利用垂径定理、勾股定理解答即可.

为 x 轴, 步长为单位长度建立平面直角坐标系, 如图所示, 则 $B(140, 0), C(180, 0), D(360, 0)$. 设 AM 段抛物线的表达式为 $y=a(x-70)^2+b$. 将 $B(140, 0)$ 代入得 $a(140-70)^2+b=0$, $\therefore b=-70^2a$, $\therefore AM$ 段抛物线的表达式为 $y=a(x-70)^2-70^2a$. $\because$ 三条抛物线的形状相同, CD 的中点坐标为 $(270, 0)$, $\therefore$ 设 MN 段抛物线的表达式为 $y=a(x-270)^2+c$. 将 $C(180, 0)$ 代入得 $a(180-270)^2+c=0$, $\therefore c=-90^2a$, $\therefore MN$ 段抛物线的表达式为 $y=a(x-270)^2-90^2a$. 令 $a(x-270)^2-90^2a=a(x-70)^2-70^2a$, 解得 $x=162$, 即点 M 的横坐标为 162, 由对称性知点 N 的横坐标为 378, $\therefore MN=378-162=216$ (步), $216\times 0.5=108$ (米). 故答案为 0.5, 108.



刷素养

3. 【解】(1) 过 AB 的中点作 AB 的垂线, 与桥拱顶端交于点 O , 以该垂线为 y 轴, 点 O 为原点, 建立如图 (1) 所示

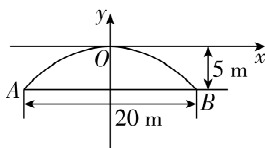


图 (1)

的坐标系 (建系方法不唯一).

由题意可知该抛物线顶点坐标为 $(0, 0)$, $B(10, -5), A(-10, -5)$.

设抛物线的表达式为 $y=ax^2$. 把 $B(10, -5)$ 代入表达式, 得 $a\times 10^2=-5$, 解得 $a=-\frac{1}{20}$,

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{20}x^2$.

(2) 不能成功. 根据题意, 得牌匾的上边缘与水面 AB 的距离最小为 $1.8+1.2+1=4$ (m), 则 $5-4=1$ (m).

对于 $y=-\frac{1}{20}x^2$, 当 $y=-1$ 时, $-\frac{1}{20}x^2=-1$, 解得 $x_1=2\sqrt{5}, x_2=-2\sqrt{5}$,

$\therefore$ 牌匾的最大长度为 $2\sqrt{5}-(-2\sqrt{5})=4\sqrt{5}\approx 4\times 2.24=8.96$ (m).

根据题意, 方案的设计长度为 $0.7\times 6+5\times 1=9.2$ (m). 由 $9.2>8.96$, 可知牌匾悬挂不能成功.

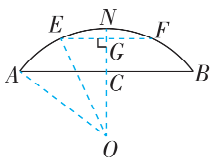
若相邻两个字的水平间距均为 0.6 m, 则牌匾

刷有所得

先确定抛物线经过的点, 再根据点的坐标求得抛物线表达式.

的长度为 $0.6 \times 6 + 5 \times 1 = 8.6$ (m) < 8.96 m, 故把字间距由 0.7 m 改为 0.6 m 即可实现悬挂目标(方案不唯一).

(3) 如图(2), 设圆弧所在圆的圆心为点 O , 水面宽度为 AB , 连接 AO , 过点 O 作 $ON \perp AB$ 于点 C , 交圆弧于点 N . 根据垂径定理, 得



图(2)

$AC = CB = \frac{1}{2}AB = 10$ m. 设圆的半径为 r m, 则 $OA = r$ m, $OC = (r - 5)$ m. 根据勾股定理, 得 $r^2 = (r - 5)^2 + 10^2$, 解得 $r = 12.5$.

在 NC 上截取 $GC = 4$ m, 过点 G 作 $EF \perp GC$, 交圆弧于 E, F 两点, 连接 OE , 则 $OG = ON - NG = 12.5 - (5 - 4) = 11.5$ (m), $EG = FG$, $\therefore EG = \sqrt{12.5^2 - 11.5^2} = 2\sqrt{6}$ (m), $\therefore EF = 2EG = 4\sqrt{6} \approx 4 \times 2.45 = 9.8$ (m).

根据题意, 方案的设计长度为 $0.7 \times 6 + 5 \times 1 = 9.2$ (m), 由 $9.8 > 9.2$, 可知方案可行.

课时3 其他问题

刷基础

1. 10 m 【解析】 $\because$ 当 $x = 2$ 时, $y = 3.2$; 当 $x = 6$ 时, $y = 3.2$, $\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = 4$, $\therefore$ 顶点坐标为 $(4, 3.6)$, $\therefore$ 设抛物线的表达式为 $y = a(x - 4)^2 + 3.6$, 把 $(0, 2)$ 代入得 $a(0 - 4)^2 + 3.6 = 2$, 解得 $a = -0.1$, $\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -0.1(x - 4)^2 + 3.6$. 令 $y = 0$, 则 $-0.1(x - 4)^2 + 3.6 = 0$, 解得 $x = 10$ 或 $x = -2$ (舍去), $\therefore$ 实心球落地点到出手点的水平距离为 10 m, 故答案为 10 m.

2. 【解】(1) 设 $s_A = at^2 + bt$. 把 $(1, 1), (2, 4)$ 分别代入, 得 $\begin{cases} a + b = 1, \\ 4a + 2b = 4, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 1, \\ b = 0, \end{cases}$ $\therefore s_A$ 关于 t 的函数表达式为 $s_A = t^2$.

(2) 能. 令 $t^2 = \frac{1}{2}t^2 + 3t$, 解得 $t_1 = 0$ (舍去), $t_2 = 6$. 当 $t = 6$ 时, $s_B = s_A = 6^2 = 36 < 100$, $\therefore$ 机器人 A, B 在到达终点前能相遇, 相遇时 t 的值为 6.

3. B 【解析】设生产数量为 x ($0 < x \leq 8$) 万件, 生产成本为 y_1 元/件, 销售价格为 y_2 元/件. $\because$ 生产成本和销售价格均是生产数量的一次函数, $\therefore$ 设 $y_1 = k_1x + b_1$ ($k_1 \neq 0$), $y_2 = k_2x + b_2$ ($k_2 \neq 0$). 由题表得 $\begin{cases} k_1 + b_1 = 9, \\ 2k_1 + b_1 = 8, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k_1 = -1, \\ b_1 = 10, \end{cases}$

关键点拨

(2) 根据销售的利润 = 单个利润 $\times$ 销售数量列方程求解.

(3) 设商店每天售卖足球的利润是 y 元, 可得 $y = -2(x - 20)^2 + 3200$, 利用二次函数的性质求出最大利润.

$\therefore y_1 = -x + 10$. 由题表得 $\begin{cases} k_2 + b_2 = 16, \\ 2k_2 + b_2 = 14, \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} k_2 = -2, \\ b_2 = 18, \end{cases} \therefore y_2 = -2x + 18$. 设利润为 w 万元, 则

$w = [(-2x + 18) - (-x + 10)]x = (-x + 8)x = -x^2 + 8x$. $\because -1 < 0$, $\therefore$ 当 $x = -\frac{8}{2 \times (-1)} = 4$ 时, 利

润最大, 即为获得最大利润, 生产数量应为 4 万件. 故选 B.

4. 【解】(1) 当售价为 115 元时, 该商店平均每天售出足球 $40 + (120 - 115) \times 2 = 40 + 10 = 50$ (个), 故答案为 50.

(2) 设当每个足球降价 x 元时, 该商店平均每天销售的利润为 3 150 元.

根据题意, 可得 $(120 - 60 - x)(40 + 2x) = 3150$, 整理, 得 $x^2 - 40x + 375 = 0$, 解得 $x_1 = 15, x_2 = 25$.

答: 当每个足球降价 15 元或 25 元时, 该商店平均每天销售的利润为 3 150 元.

(3) 设商店每天售卖足球的利润是 y 元.

根据题意, 得 $y = (120 - 60 - x)(40 + 2x)$, 整理, 得 $y = -2(x - 20)^2 + 3200$, $\therefore$ 当 $x = 20$ 时, y 有最大值, 最大值是 3 200.

答: 当每个足球降价 20 元时, 商店每天售卖该款足球的利润最大, 最大利润是 3 200 元.

刷提升

关键点拨

根据两个函数图象分别求出两个函数表达式, 再根据收益 = 售价 - 成本列出二次函数表达式即可求解.

1. 9 时 $\frac{9}{4}$ 元 【解析】设交易时刻 y_1 (时) 与每

千克售价 x_1 (元) 之间的函数关系式为 $y_1 = kx_1 + b$ ($k \neq 0$). 将 $(5, 10), (6, 8)$ 代入, 得

$\begin{cases} 5k + b = 10, \\ 6k + b = 8, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = -2, \\ b = 20, \end{cases}$ 所以 $y_1 = -2x_1 + 20$

($5 \leq x_1 \leq 7$). 设每千克成本 y_2 (元) 与交易时刻 x_2 (时) 之间的函数关系式为 $y_2 = a(x_2 - 10)^2 + 3$ ($a \neq 0, 6 \leq x_2 \leq 10$). 将 $(6, 7)$ 代入, 得

$(6 - 10)^2 a + 3 = 7$, 解得 $a = \frac{1}{4}$, 所以 $y_2 = \frac{1}{4}(x_2 -$

$10)^2 + 3 = \frac{1}{4}x_2^2 - 5x_2 + 28$. 设在这段时间内, 出

售每千克这种水果的收益为 w 元. 根据题意,

得 $y_2 = \frac{1}{4}x_2^2 - 5x_2 + 28 = \frac{1}{4}(-2x_1 + 20)^2 -$

$5(-2x_1 + 20) + 28 = x_1^2 - 10x_1 + 28$, 则 $w = x_1 - y_2 =$

$x_1 - (x_1^2 - 10x_1 + 28) = -x_1^2 + 11x_1 - 28 =$

$-\left(x_1 - \frac{11}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$, $\therefore$ 当 $x_1 = \frac{11}{2}$ 时, $y_1 = -11 + 20 =$

9, w 取得最大值 $\frac{9}{4}$. 故答案为 9 时, $\frac{9}{4}$ 元.

2. 【解】(1) 根据表格数据, 可知 v 随着 t 的变化均匀变化, $\therefore$ 设 $v=kt+b$. 将 $(1, 15), (2, 10)$ 分别代入, 得 $\begin{cases} 15=k+b, \\ 10=2k+b, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=-5, \\ b=20, \end{cases} \therefore v$ 与 t 的函数关系式为 $v=-5t+20$.

(2) 将 $(1, 17.5), (2, 30)$ 分别代入 $s=pt^2+qt$, 得 $\begin{cases} p+q=17.5, \\ 4p+2q=30, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} p=-2.5, \\ q=20, \end{cases} \therefore s=-2.5t^2+20t=-2.5(t-4)^2+40$, $\therefore$ 当 $t=4$ 时, s 取得最大值, 为 40, 即该汽车刹车后行驶的最大距离为 40 m.

(3) 能. 由 $v=-5t+20$ 可知, 当 $t=0$ 时, $v_0=v=20$. 从发现情况到刹车的反应时间是 n (s) ($0.5 \leq n \leq 0.8$), $\therefore$ 接到提示到紧急刹车所行驶的距离范围是 $10 \leq s \leq 16$. $v=5$ 时, $t=3$, $\therefore$ 刹车后行驶的距离为 $s=-2.5 \times 3^2+20 \times 3=37.5$, $\therefore$ 到达窄路前行驶的距离范围是 $47.5 \leq s \leq 53.5$. $\because 53.5 < 60$, $\therefore$ 能在到达窄路时将车速降低到 5 m/s 以下.

3. 【解】(1) 把 $\begin{cases} x=3, \\ y=7.2, \end{cases} \begin{cases} x=4, \\ y=5.8 \end{cases}$ 分别代入 $y_1=ax^2+c$ 可得 $\begin{cases} 9a+c=7.2, \text{①} \\ 16a+c=5.8. \text{②} \end{cases}$ ②-①, 得 $7a=-1.4$, 解得 $a=-\frac{1}{5}$.

把 $a=-\frac{1}{5}$ 代入①, 得 $c=9$, $\therefore a=-\frac{1}{5}, c=9$.

(2) 4 月份出售这种蔬菜每千克获利最大. 理由: 设这种蔬菜每千克获利 w 元. 根据题意, 有 $w=x_1-x_2=\frac{1}{2}t+2-\left(\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{2}t+3\right)=-\frac{1}{4}t^2+2t-1=-\frac{1}{4}(t-4)^2+3$. $\because -\frac{1}{4}<0, t=4$ 在 $1 \leq t \leq 7$ 的范围内, $\therefore$ 当 $t=4$ 时, w 有最大值.

答: 在 4 月份出售这种蔬菜每千克获利最大.

(3) 由 $y_1=y_2$, 得 $x-1=-\frac{1}{5}x^2+9$,

整理得 $x^2+5x-50=0$, 解得 $x_1=5, x_2=-10$ (舍去), $\therefore$ 该蔬菜供给量与需求量相等时的售价为 5 元/千克.

此时, $y_1=y_2=5-1=4$ (吨) = 4 000 千克, 把 $x=5$ 代入 $x_1=\frac{1}{2}t+2$, 得 $t=6$, 把 $t=6$ 代入 $w=$

关键点拨

(2) 设这种蔬菜每千克获利 w 元, 根据 $w=x_1-x_2$ 列出函数关系式, 由二次函数的性质可得结论;
(3) 根据题意列出方程, 求出 x 的值, 将 x 的值代入 $x_1=\frac{1}{2}t+2$ 求出对应 t 的值, 进而求出此时每千克的利润, 最后求出总利润即可.

关键点拨

(2) 令 $y=0$, 可得关于 x 的一元二次方程, 求出方程的根, 即可得到 A, B 两点的横坐标, 然后根据 $AB=2$ 列方程求解即可.

$-\frac{1}{4}t^2+2t-1$, 得 $w=-\frac{1}{4} \times 36+2 \times 6-1=2$,

$\therefore$ 总利润为 $2 \times 4\ 000=8\ 000$ (元).

答: 该蔬菜供给量与需求量相等时的售价为 5 元/千克, 按此价格出售获得的总利润为 8 000 元.

6.5 二次函数与一元二次方程

课时 1 二次函数与一元二次方程之间的关系



刷基础

1. B 【解析】由图象可得, 该二次函数与 x 轴无交点, $\therefore$ 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实数根, $\therefore b^2-4ac<0$. 由图象可得当 $x=-1$ 时, $y=a-b+c>0$, $\therefore$ 点 $A(b^2-4ac, a-b+c)$ 在第二象限. 故选 B.

2. -1 (答案不唯一) 【解析】抛物线表达式为 $y=(x+1)^2+k=x^2+2x+1+k$. $\therefore$ 抛物线与 x 轴有两个公共点, 即方程 $x^2+2x+1+k=0$ 有两个不相等的实数根, $\therefore b^2-4ac=2^2-4 \times 1 \times (1+k)=4-4(1+k)=4-4-4k=-4k>0$, 解得 $k<0$, $\therefore k$ 的值可以是 -1. 故答案为 -1 (答案不唯一).

3. $x_1=-1, x_2=5$ 【解析】 $\because$ 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $A(-4, 4), B(2, 4)$, $\therefore$ 可以得到方程 $4=ax^2+bx+c$ 的解为 $x=-4$ 或 $x=2$. $\therefore$ 方程 $a(x-3)^2-4=b(3-x)-c$ 可以转化为方程 $a(x-3)^2+b(x-3)+c=4$, $\therefore x-3=-4$ 或 $x-3=2$, 解得 $x_1=-1, x_2=5$. 故答案为 $x_1=-1, x_2=5$.

4. (1) 【证明】当 $y=0$ 时, $x^2-(m-2)x+m-3=0$. $\therefore b^2-4ac=[-(m-2)]^2-4 \times 1 \times (m-3)=m^2-4m+4-4m+12=m^2-8m+16=(m-4)^2 \geq 0$, $\therefore$ 一元二次方程 $x^2-(m-2)x+m-3=0$ 有实数根, $\therefore$ 无论 m 为何值, 该二次函数图象与 x 轴一定有交点.

(2) 【解】由 (1) 可知若该二次函数的图象与 x 轴交于 A, B 两点, 则 $m \neq 4$.

当 $y=0$ 时, $x^2-(m-2)x+m-3=0$, $\therefore x=\frac{-[-(m-2)] \pm \sqrt{(m-4)^2}}{2}=\frac{m-2 \pm (m-4)}{2}$, $\therefore x_1=m-3, x_2=1$, $\therefore AB=|(m-3)-1|=|m-4|=2$, $\therefore m=6$ 或 $m=2$.



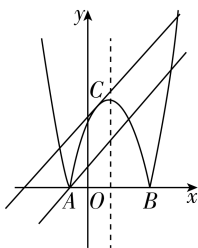
刷提升

1. B 【解析】 $\because$ 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过 $(-3, 0)$ 与 $(1, 0)$ 两点, $\therefore$ 当 $y=0$ 时, $ax^2+bx+c=0$ 的两个根为 -3 和 1, 函数 $y=ax^2+$

$bx+c$ 的图象的对称轴是直线 $x=-1$. 又 $\because$ 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c+m=0$ ($m>0$) 有两个根, 其中一个根是 3, $\therefore$ 另一个根为 -5 , 易知函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向下. $\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c+n=0$ ($0<n<m$) 有两个整数根, $\therefore$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c+n$ 与 x 轴的一个交点的横坐标在 -5 与 -3 之间, 另一个交点的横坐标在 1 与 3 之间, $\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c+n=0$ ($0<n<m$) 的两个整数根符合上述范围的是 -4 和 2 . 故选 B.

2.1 或 $\frac{13}{4}$ 【解析】 $\because$ 抛物线的

表达式为 $y=(x-1)^2-4$, $\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(1, -4)$. 令 $y=0$, 则 $(x-1)^2-4=0$, 解得 $x_1=-1, x_2=3$, $\therefore A(-1, 0), B(3, 0)$. $\because$ 点 $(1, -4)$ 关于 x 轴的对称点为 $(1, 4)$, $\therefore$ 如图, 曲线 ACB 所对应的函数表达式为 $y=-(x-1)^2+4$ ($-1 \leq x \leq 3$). 当直线 $y=x+b$ 与新图象恰有三个公共点时, 有以下两种情况: ①当直线 $y=x+b$ 过点 $A(-1, 0)$ 时, $0=-1+b$, 解得 $b=1$; ②当直线 $y=x+b$ 与抛物线 $y=-(x-1)^2+4$ ($-1 \leq x \leq 3$) 只有一个公共点时, 令 $-(x-1)^2+4=x+b$, 即 $x^2-x-(3-b)=0$, $\therefore 1+4(3-b)=13-4b=0$, 解得 $b=\frac{13}{4}$. 综上所述, b 的值为 1 或 $\frac{13}{4}$. 故答案为 1 或 $\frac{13}{4}$.



思路分析

先根据已知抛物线的表达式求出点 A, B 的坐标以及顶点坐标, 再根据翻折变换求出曲线 ACB 所对应的表达式, 最后根据直线 $y=x+b$ 与新图象恰有三个公共点, 结合图象进行计算即可.

关键点拨

先将二次函数写成一般式 $y=mx^2+(2-2m)x-4$ 是解题的关键.

$$(-2) = 4m^2 + 4 > 0, \text{ 解方程得 } x_1 = \frac{m-1+\sqrt{m^2+1}}{m}, x_2 = \frac{m-1-\sqrt{m^2+1}}{m},$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{m-1+\sqrt{m^2+1}}{m} \leq 3, \\ \frac{m-1-\sqrt{m^2+1}}{m} \geq -3, \end{cases} \text{ 解得 } m \geq \frac{8}{15} \text{ 或 } m < 0.$$

课时2 利用二次函数图象求一元二次方程的近似根



刷基础

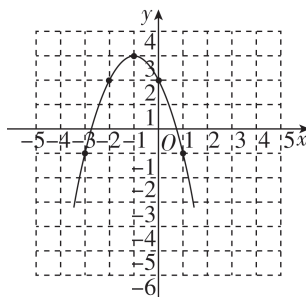
1. B 【解析】观察表格, 得当 $x=1.2$ 时, 函数值为 0.04 , 在给出的 y 值中最接近于 0 , 即与方程 $x^2+3x-5=0$ 的一个根最接近的数为 1.2 . 故选 B.

2. C 【解析】因为二次函数 $y=ax^2-2ax+c$, 所以抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{-2a}{2a}=1$. 因为抛物线与 x 轴的一个交点横坐标在 -0.5 和 -0.4 之间, $2 \times 1 - (-0.5) = 2.5$, $2 \times 1 - (-0.4) = 2.4$, 所以抛物线与 x 轴的另一个交点横坐标在 2.4 和 2.5 之间, 所以关于 x 的方程 $ax^2-2ax+c=0$ 的较大的根的取值范围是 $2.4 < x < 2.5$. 故选 C.

3. 【解】(1) 当 $x=-3$ 时, $y=-(-3)^2-2 \times (-3)+2=-1$; 当 $x=-2$ 时, $y=-(-2)^2-2 \times (-2)+2=2$; 当 $x=-1$ 时, $y=-(-1)^2-2 \times (-1)+2=3$; 当 $x=0$ 时, $y=-0^2-2 \times 0+2=2$; 当 $x=1$ 时, $y=-1^2-2 \times 1+2=-1$. 填表如下:

x	...	-3	-2	-1	0	1	...
y	...	-1	2	3	2	-1	...

如图所示.



(2) $x_1 \approx 0.7, x_2 \approx -2.7$. (允许有 ± 0.1 的误差)



刷提升

1. 1 $2 \leq m < 7$ 【解析】抛物线 $y=ax^2-4x+2$ 的对称轴是直线 $x=-\frac{-4}{2a}=\frac{2}{a}$. $\therefore$ 抛物线 $y=ax^2-$

重难点专题 1 二次函数的综合应用



刷难关

思路分析

1. 【解】(1) 将点 $A(-1, 0)$, $B(5, 0)$, $C(0, 5)$ 代

(2) 先求出直线 BC 的表达式为 $y = -x + 5$, 再设点 D 的坐标为 $(t, -t^2 + 4t + 5)$ ($0 < t < 5$), 则点 E 的坐标为 $(t, -t + 5)$, 点 F 的坐标为 $(t, 0)$, 根据三角形的面积建立方程, 解方程即可;

(3) 先求出抛物线的对称轴为直线 $x = 2$, 再设点 M 的坐标为 $(2, m)$, 则可得 BC^2 , MC^2 , MB^2 的值, 然后分三种情况: ① $\angle BCM = 90^\circ$, ② $\angle CBM = 90^\circ$, ③ $\angle CMB = 90^\circ$, 利用勾股定理建立方程, 解方程即可.

$$\begin{cases} a-b+c=0, \\ 25a+5b+c=0, \\ c=5, \end{cases} \text{解得}$$

$$\begin{cases} a=-1, \\ b=4, \\ c=5, \end{cases} \therefore \text{抛物线的表达式为 } y = -x^2 + 4x + 5.$$

(2) 设直线 BC 的表达式为 $y = k_0x + b_0$ ($k_0 \neq 0$).

$$\text{将点 } B(5, 0), C(0, 5) \text{ 分别代入, 得 } \begin{cases} 5k_0 + b_0 = 0, \\ b_0 = 5, \end{cases} \text{解得 } \begin{cases} k_0 = -1, \\ b_0 = 5, \end{cases} \therefore \text{直线 } BC \text{ 的表达式为 } y = -x + 5.$$

设点 D 的坐标为 $(t, -t^2 + 4t + 5)$ ($0 < t < 5$), 则点 E 的坐标为 $(t, -t + 5)$, 点 F 的坐标为 $(t, 0)$, $\therefore DE = -t^2 + 4t + 5 - (-t + 5) = -t^2 + 5t$.

$\therefore B(5, 0)$, $\therefore \triangle BDE$ 中 DE 边上的高与 $\triangle CDE$ 中 DE 边上的高之和为 5.

$$\therefore \triangle CDB \text{ 的面积为 } 10, \therefore S_{\triangle BDE} + S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} \times 5(-t^2 + 5t) = 10, \text{解得 } t = 1 \text{ 或 } t = 4, \therefore \text{点 } F \text{ 的横坐标为 } 1 \text{ 或 } 4.$$

(3) 将二次函数 $y = -x^2 + 4x + 5$ 化成顶点式为 $y = -(x - 2)^2 + 9$, $\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = 2$, $\therefore$ 设点 M 的坐标为 $(2, m)$.

$$\therefore B(5, 0), C(0, 5), \therefore BC^2 = (5 - 0)^2 + (0 - 5)^2 = 50, BM^2 = (5 - 2)^2 + (0 - m)^2 = m^2 + 9, CM^2 = (0 - 2)^2 + (5 - m)^2 = m^2 - 10m + 29.$$

① 当 $\angle BCM = 90^\circ$ 时, $BC^2 + MC^2 = MB^2$, 即 $50 + m^2 - 10m + 29 = m^2 + 9$, 解得 $m = 7$, 此时点 M 的坐标为 $(2, 7)$;

② 当 $\angle CBM = 90^\circ$ 时, $BC^2 + MB^2 = MC^2$, 即 $50 + m^2 + 9 = m^2 - 10m + 29$, 解得 $m = -3$, 此时点 M 的坐标为 $(2, -3)$;

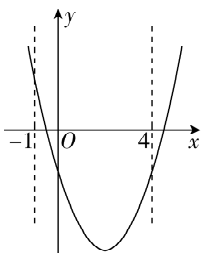
③ 当 $\angle CMB = 90^\circ$ 时, $MB^2 + MC^2 = BC^2$, 即 $m^2 + 9 + m^2 - 10m + 29 = 50$, 解得 $m = 6$ 或 $m = -1$, 此时点 M 的坐标为 $(2, 6)$ 或 $(2, -1)$.

综上, 点 M 的坐标为 $(2, 7)$ 或 $(2, -3)$ 或 $(2, 6)$ 或 $(2, -1)$.

2. 【解】(1) $\therefore$ 直线 $y = x + 4$ 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 C , 当 $x = 0$ 时, $y = 4$, 当 $y = 0$ 时, $x + 4 = 0$, 解得 $x = -4$, $\therefore A(-4, 0)$, $C(0, 4)$.

又 $\therefore$ 对称轴为直线 $x = -1$,

$4x + 2$ 的顶点坐标为 $(2, n)$, $\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 - 4x + 2$ 的对称轴是直线 $x = 2$, $\therefore \frac{2}{a} = 2$, $\therefore a = 1$, $\therefore$ 抛物线



的表达式为 $y = x^2 - 4x + 2$,

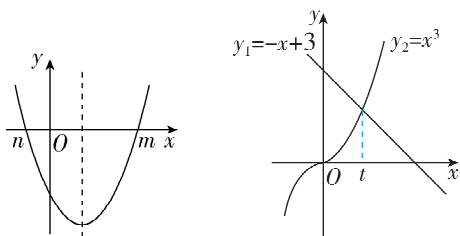
平移后的抛物线表达式为 $y = x^2 - 4x + 2 - m$. 如图, 由题意得, 直线 $x = -1$ 与平移后的抛物线交点在 x 轴上方, 直线 $x = 4$ 与平移后的抛物线交

点在 x 轴上或 x 轴下方, 即 $\begin{cases} 1 + 4 + 2 - m > 0, \\ 16 - 16 + 2 - m \leq 0, \end{cases}$ 解

得 $2 \leq m < 7$. 故答案为 $1, 2 \leq m < 7$.

2. 【解】(1) 根据抛物线的对称性, 得抛物线和 x 轴另外一个交点的坐标为 $(-1, 0)$, 则关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解为 -1 和 3 . 故答案为 -1 和 3 .

(2) 令 $y = x^2 - 2x + k$, 则其图象的对称轴为直线 $x = 1$. $\therefore$ 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 有两个实数根 m, n , 且 $m > n$, $\therefore (-2)^2 - 4k > 0$, 函数 $y = x^2 - 2x + k$ 的图象与 x 轴有两个不同的交点, $\therefore k < 1$. 如图(1), $\therefore 2 < m < 3$, $\therefore x = 2$ 时 $y < 0$, 且 $x = 3$ 时 $y > 0$, $\therefore 4 - 4 + k < 0$ 且 $9 - 6 + k > 0$, $\therefore -3 < k < 0$.



图(1)

图(2)

(3) ① 此方程有 1 个实数根.

② 如图(2), 直线 $y_1 = -x + 3$ 与函数 $y_2 = x^3$ 的图象交点的横坐标 t 就是方程 $x^3 + x - 3 = 0$ 的根.

由图象可知当 $x < t$ 时, $y_1 > y_2$; 当 $x > t$ 时, $y_1 < y_2$.

当 $x = 1$ 时, $y_1 = 2, y_2 = 1, y_1 > y_2$;

当 $x = 2$ 时, $y_1 = 1, y_2 = 8, y_1 < y_2$, $\therefore 1 < t < 2$.

当 $x = 1.5$ 时, $y_1 = 1.5, y_2 = 3.375, y_1 < y_2$;

当 $x = 1.2$ 时, $y_1 = 1.8, y_2 = 1.728, y_1 > y_2$,

$\therefore 1.2 < t < 1.5$.

当 $x = 1.3$ 时, $y_1 = 1.7, y_2 = 2.197, y_1 < y_2$,

$\therefore 1.2 < t < 1.3$.

当 $x = 1.25$ 时, $y_1 = 1.75, y_2 = 1.953125, y_1 <$

y_2 , $\therefore 1.2 < t < 1.25$,

$\therefore t \approx 1.2$, 故此方程实数根的近似值为 1.2 .