

最小,为 $-t^2+2t+3$;当 $x=3+t$ 时,函数值最大,为 $-(3+t-1)^2+4=-t^2-4t$.

$\therefore$ 函数的最大值与最小值之差等于 11,

$$\therefore (-t^2-4t)-(-t^2+2t+3)=11, \text{ 解得 } t=-\frac{7}{3}.$$

②当 $t<1<3+t$,即 $-2<t<1$ 时,当 $x=1$ 时,函数值最大,为 4. 当 $1-t>3+t-1$,即 $t<-\frac{1}{2}$ 时, $x=t$ 时,函数值最小,为 $-t^2+2t+3$.

$\therefore$ 函数的最大值与最小值之差等于 11,

$$\therefore 4-(-t^2+2t+3)=11, \text{ 解得 } t_1=1+\sqrt{11} \text{ (舍)}, t_2=1-\sqrt{11} \text{ (舍)}.$$

当 $1-t=3+t-1$,即 $t=-\frac{1}{2}$ 时, $x=t$ 或 $x=3+t$ 时,函数值相等,均为最小值,为 $-t^2+2t+3$,

关键点拨

(2) 根据当点 P 到直线 AB 的距离最大时, $S_{\triangle PAB}$ 最大, 转换为求 $S_{\triangle PAB}$ 的最大值, 即可求出点 P 到直线 AB 的距离的最大值, 及点 P 的坐标.

(3) 分三类情况讨论: ① 当 $3+t \leq 1$ 时, ② 当 $t < 1 < 3+t$ 时, ③ 当 $t \geq 1$ 时.

由上易知不符合题意.

当 $3+t-1>1-t$,即 $t>-\frac{1}{2}$ 时, $x=3+t$ 时,函数

值最小,为 $-(3+t-1)^2+4=-t^2-4t$.

$\therefore$ 函数的最大值与最小值之差等于 11,

$$\therefore 4-(-t^2-4t)=11, \text{ 解得 } t=-2 \pm \sqrt{11} \text{ (舍)}.$$

③当 $t \geq 1$ 时, $x=t$ 时,函数值最大,为 $-t^2+2t+3$;

当 $x=3+t$ 时,函数值最小,为 $-(3+t-1)^2+4=-t^2-4t$.

$\therefore$ 函数的最大值与最小值之差等于 11,

$$\therefore (-t^2+2t+3)-(-t^2-4t)=11, \text{ 解得 } t=\frac{4}{3}.$$

综上, t 的值为 $-\frac{7}{3}$ 或 $\frac{4}{3}$.

第 7 章 图形的相似

7.1 相似多边形

课时 1 成比例线段



刷基础

1. B 【解析】

A

由于 $2:3 \neq 4:5$,即 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm 不成比例,所以 A 选项不符合题意

B

由于 $2:3=4:6$,即 2 cm, 3 cm, 4 cm, 6 cm 成比例,所以 B 选项符合题意

C

由于 $1:2 \neq 2:3$,即 1 cm, 2 cm, 3 cm, 2 cm 不成比例,所以 C 选项不符合题意

D

由于 $3:2 \neq 6:3$,即 3 cm, 2 cm, 6 cm, 3 cm 不成比例,所以 D 选项不符合题意

刷有所得

对于四条线段 a, b, c, d , 如果其中两条线段的比(即它们的长度比)与另两条线段的比相等,如 $a:b=c:d$ (即 $ad=bc$), 我们就说这四条线段是成比例线段.

2. C 【解析】根据题意,线段 a, b, c, d 是成比例线段,且 $a=3$ cm, $b=2$ cm, $c=6$ cm, 则有 $a:b=c:d$, 即 $3:2=6:d$, $\therefore d=4$ cm. 故选 C.

3. A 【解析】 $\because b$ 是 a, c 的比例中项, $\therefore b^2=ac$, $\therefore \frac{b}{c}=\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$. 故选 A.

4. 4 【解析】 $\because$ 线段 $a=2, c=8$, 线段 b 是线段 a, c 的比例中项, $\therefore b^2=ac=2 \times 8=16$, $\therefore b_1=4, b_2=-4$ (舍去). 故答案为 4.

5. D 【解析】A 选项, 由 $2a=5b$ 变形得 $\frac{a}{5}=\frac{b}{2}$, 原说法正确, 不符合题意; B 选项, 由 $2a=5b$

变形得 $\frac{2a}{5}=40\%a$, 即 b 是 a 的 40%, 原说法正确, 不符合题意; C 选项, 由 $2a=5b$, 两边

同除以 $2b$, 得 $\frac{a}{b}=\frac{5}{2}$, 即 $a:b=5:2$, 原说法正

确, 不符合题意; D 选项, 由 $\frac{a}{b}=\frac{5}{2}$, 则 $\frac{a-b}{b} \times$

$100\%=\frac{5-2}{2} \times 100\%=150\%$, 即 a 比 b 多

150%, 原说法错误, 符合题意. 故选 D.

6. 2 或 -1 【解析】分两种情况: ①当 $a+b+c=0$

时, $b+c=-a$, $\therefore k=\frac{b+c}{a}=-\frac{a}{a}=-1$; ②当 $a+$

$b+c \neq 0$ 时, $\therefore \frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}=k$, $\therefore ak=b+c$, ①

$bk=a+c$, ② $ck=a+b$, ③ ①+②+③, 得 $(a+b+c)k=2(a+b+c)$, 故 $k=2$. 综上, $k=2$ 或 -1.

7. 30 厘米, 45 厘米 【解析】设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$

的周长分别是 x 厘米和 y 厘米. $\therefore \frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}=\frac{2}{3}$, $\therefore \frac{AB+BC+CA}{DE+EF+FD}=\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$. ① 由题意可

得 $y-x=15$. ② 由①得 $x=\frac{2}{3}y$. ③ 将③代入

②, 得 $y-\frac{2}{3}y=15$, $\therefore y=45$. 将 $y=45$ 代入②,

得 $x=30$. 故 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的周长分别是 30

厘米和 45 厘米.

8. 【解】(1) 设 $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6} = k (k \neq 0)$, 则 $a = 2k$, $b = 3k$, $c = 6k$, 代入 $a - b + 2c = 22$, 得 $2k - 3k + 12k = 22$, 解得 $k = 2$, $\therefore a = 4, b = 6, c = 12$.

(2) ① 当 $a:b=c:d$ 时, $ad=bc$, 即 $4d=72$, $\therefore d=18$.

② 当 $a:c=d:b$ 时, $ab=cd$, 即 $24=12d$, $\therefore d=2$.

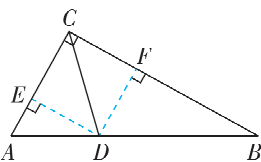
③ 当 $a:b=d:c$ 时, $ac=bd$, 即 $48=6d$, $\therefore d=8$.

综上所述, 当 $d=2$ 或 8 或 18 时, 使得 a, b, c, d 四个数能构成比例式. 故答案为 2 或 8 或 18 .

9. 【解】如图, 过点 D 作

$DE \perp AC$ 于点 E , $DF \perp BC$ 于点 F .

在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, 由勾



股定理得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$.

又 $\because CD$ 是 $\angle ACB$ 的平分线,

$$\therefore DE = DF, \therefore \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{\frac{1}{2} \times AC \times DE}{\frac{1}{2} \times BC \times DF} = \frac{AC}{BC}.$$

$$\text{易得 } \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{AD}{BD}, \therefore \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}, \text{ 即 } \frac{8}{15} = \frac{AD}{17-AD},$$

$$\therefore 8(17-AD) = 15AD, \text{ 解得 } AD = \frac{136}{23}.$$

刷易错

10. D 【解析】设另一条线段的长为 x cm. 根据题意得 ① $x \times 1 = 2 \times \sqrt{2}$, 解得 $x = 2\sqrt{2}$; ② $x \times 2 =$

$$\sqrt{2} \times 1, \text{ 解得 } x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ ③ } x \times \sqrt{2} = 2 \times 1, \text{ 解得 } x = \sqrt{2}.$$

综上, 另一条线段的长为 $2\sqrt{2}$ cm 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm

或 $\sqrt{2}$ cm, 故三位同学的结果都不正确.

课时2 平行线分线段成比例

刷基础

1. B 【解析】 $\because l_1 \parallel l_2 \parallel l_3, \therefore \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$, 故选 B.

2. D 【解析】 $\because A_1O = 3, OB_1 = B_1C_1 = 2, C_1D_1 = 4, AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1, \therefore \frac{AO}{OB} = \frac{A_1O}{OB_1} = \frac{3}{2},$

$$\frac{OB}{BC} = \frac{OB_1}{B_1C_1} = 1, \frac{BC}{CD} = \frac{B_1C_1}{C_1D_1} = \frac{1}{2}, \therefore AO = \frac{3}{2}OB, BC = OB, CD = 2BC = 2OB, \therefore AB = OA + OB = \frac{5}{2}OB, OC = OB + BC = 2OB, BD = BC + CD = 3OB,$$

刷有所得

根据平行线分线段成比例的基本事实求线段的基本事实求线段的长时, 一般先根据已知线段和待求线段列出比例式, 然后代入已知条件中的数据, 最后根据比例的性质计算.

易错警示

题目未指明比例线段的顺序, 需分类讨论.

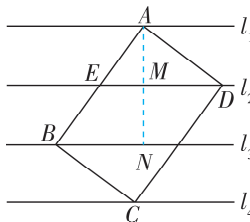
$$\therefore BD - AB = 3OB - \frac{5}{2}OB = \frac{1}{2}OB, OC - OA =$$

$$2OB - \frac{3}{2}OB = \frac{1}{2}OB, OC - CD = 2OB - 2OB = 0,$$

$$CD - OB = 2OB - OB = OB. \therefore OB > \frac{1}{2}OB > 0,$$

$\therefore CD - OB$ 的结果最大. 故选 D.

3. $\frac{12}{5}$ 【解析】过 A 点作



$AN \perp l_3$ 于点 N , 交 l_2

于点 M , 令 AB 与 l_2 的

交点为 E , 如图. $\therefore$ 在

矩形 $ABCD$ 中, $BC = 4$,

$\therefore AD = BC = 4, \angle BAD = 90^\circ. \therefore$ 直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$

且相邻两直线间距离相等, $AN \perp l_3, \therefore AM =$

$$NM, \therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AM}{NM} = 1. \therefore AB = 6, \therefore AE = EB =$$

$$\frac{1}{2}AB = 3, \therefore \text{在 } \text{Rt} \triangle EAD \text{ 中}, ED = \sqrt{AE^2 + AD^2} =$$

$$5. \therefore S_{\triangle EAD} = \frac{1}{2} \times AE \times AD = \frac{1}{2} \times AM \times ED, \therefore AM =$$

$$\frac{AE \times AD}{ED} = \frac{12}{5}, \therefore MN = AM = \frac{12}{5}.$$

4. 10 【解析】 $\because AE = 3, EB = 2, \therefore AB = 5. \therefore EG \parallel$

$$BC, GF \parallel DC, \therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AG}{AC}, \frac{AG}{AC} = \frac{AF}{AD}, \therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD},$$

$$\therefore \frac{3}{5} = \frac{6}{AD}, \therefore AD = 10. \text{ 故答案为 } 10.$$

5. D 【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, 点 E 是

AD 上一点, $\therefore BC = AD = AB = 6, AE \parallel BC,$

$$\therefore \frac{AF}{FB} = \frac{AE}{BC} = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{3}, \text{ 即 } \frac{AF}{AB+AF} = \frac{1}{3}, \frac{AF}{6+AF} =$$

$$\frac{1}{3}, \therefore AF = 3, \therefore FB = AF + AB = 9. \text{ 故选 D.}$$

6. $\frac{9}{2}$ 【解析】 $\because DE \parallel AC, \therefore \frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC}. \therefore DB = 4,$

$$DA = 2, DE = 3, \therefore \frac{4}{4+2} = \frac{3}{AC}, \therefore AC = \frac{9}{2}. \text{ 故答案}$$

$$\text{为 } \frac{9}{2}.$$

7. A 【解析】 $\because DE \parallel BC, \frac{AD}{DB} = \frac{4}{3}, \therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} =$

$$\frac{4}{7}, \therefore \text{当 } \frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AC} = \frac{4}{7} \text{ 时}, EF \parallel CD, \text{ 此时 } \frac{DF}{AD} = \frac{3}{7},$$

故 A 选项符合题意; 由 B、C、D 选项的条件不能得出 $EF \parallel CD$. 故选 A.

刷易错

8. $\frac{3}{5}$ 【解析】 $\because AB \parallel CD \parallel EF, \therefore \frac{BC}{CE} = \frac{AD}{DF}$
 $\because AD = AG + GD = 3, DF = 5, \therefore \frac{BC}{CE} = \frac{3}{5}$.

刷提升

1. B 【解析】经过 AC 且垂直于海平面的平面截面图如图, 其中 AF, BG, CH 垂直于海平面, BD 垂直 AF 于点 D, CE 垂直 AF 于点 E, 则 $BD \parallel CE$, $AF = 500, BG = 300, CH = 200, \therefore DF = BG = 300, EF = CH = 200, \therefore AD = AF - DF = 500 - 300 = 200, AE = AF - EF = 500 - 200 = 300. \therefore BD \parallel CE, \therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$. 故选 B.

2. 1 【解析】 $\because$ 四边形 ABCD 是菱形, $\therefore BC \parallel AD, CD \parallel AB, \therefore \frac{AB}{AM} = \frac{NC}{NM}, \frac{AD}{AN} = \frac{CM}{NM}, \therefore \frac{AB}{AM} + \frac{AD}{AN} = \frac{NC}{NM} + \frac{CM}{NM} = 1$. 又 $\because AB = AD = 1, \therefore \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = 1$.

3. $\frac{1}{3} 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 【解析】 $\because D_1E_1 \parallel BC, \therefore \frac{D_1E_1}{BC} = \frac{AD_1}{AB}$. $\because BC = 1, AD_1 = \frac{1}{3}AB, \therefore D_1E_1 = \frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3}$. $\therefore D_1D_2 = \frac{1}{3}D_1B, \therefore D_1D_2 = \frac{2}{9}AB, \therefore AD_2 = \frac{5}{9}AB$. $\because D_2E_2 \parallel BC, \therefore \frac{AD_2}{AB} = \frac{D_2E_2}{BC}, \therefore D_2E_2 = \frac{5}{9} = 1 - \frac{4}{9} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$, 同理可得, $D_3E_3 = \frac{19}{27} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3, \dots, \therefore D_nE_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$. 故答案为 $\frac{1}{3}, 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

4. 【证明】如图, 过点 P 作 $PM \parallel CE$, 交 AC 于点 M,
 $\therefore \frac{AP}{PE} = \frac{AM}{MC}$. $\because \triangle ACD$ 和 $\triangle CBE$ 都是等边三角形, $\therefore AD = CD, CE = BE, \angle DAC = \angle DCA = \angle BCE = 60^\circ, \therefore AD \parallel CE, \therefore \frac{DQ}{BC} = \frac{AC}{BC}, PM \parallel AD, \therefore \frac{DP}{CP} = \frac{AM}{MC}, \therefore \frac{AP}{PE} = \frac{DP}{CP}$.

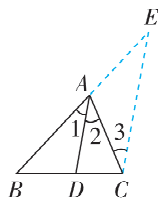
易错警示

易受题中图形影响, 主观认为不对应的一些边成比例而出错.

同理可得 $CD \parallel BE, \therefore \frac{AP}{PE} = \frac{AC}{BC}, \therefore \frac{DQ}{BQ} = \frac{AP}{PE}, \therefore \frac{DQ}{BQ} = \frac{DP}{CP}, \therefore PQ \parallel AB, \therefore \angle CPQ = \angle ACP = 60^\circ, \angle CQP = \angle BCE = 60^\circ$. 又 $\because \angle PCQ = 180^\circ - \angle ACD - \angle BCE = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ, \therefore \triangle CPQ$ 是等边三角形.

刷素养

5. (1) 【证明】如图, 过点 C 作 $CE \parallel DA$, 交 BA 的延长线于点 E. $\because CE \parallel DA, \therefore \frac{BD}{CD} = \frac{BA}{AE}, \angle 2 = \angle 3, \angle 1 = \angle E$.
 $\because AD$ 平分 $\angle BAC, \therefore \angle 1 = \angle 2, \therefore \angle 3 = \angle E, \therefore AE = AC, \therefore \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.



- (2) 【解】① $\because AD$ 是角平分线, $\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$.
 $\because AB = 5 \text{ cm}, AC = 4 \text{ cm}, BC = 7 \text{ cm}, \therefore \frac{5}{4} = \frac{BD}{7 - BD}, \therefore BD = \frac{35}{9} \text{ cm}$.

- ② $\because AD$ 是角平分线, $\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{7}{11}, \therefore CD = \frac{11}{7}BD, \therefore BC = CD + BD = \frac{11}{7}BD + BD = \frac{18}{7}BD$.
 $\because M$ 是 BC 的中点, $\therefore CM = MB = \frac{9}{7}BD$.

- $\because FM \parallel AD, \therefore \frac{CF}{AC} = \frac{CM}{CD} = \frac{\frac{9}{7}BD}{\frac{11}{7}BD} = \frac{9}{11}, \therefore CF = \frac{9}{11}AC = 9$. 故答案为 9.

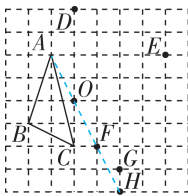
课时 3 图形的位似



刷基础

1. B 【解析】按照位似图形的定义可判断选项 A、C、D 中的图形都是位似图形, 均不符合题意; 选项 B 中的图形不是位似图形, 符合题意. 故选 B.

2. D 【解析】如图, 连接 AO 并延长. $\because$ 以点 O 为位似中心, 点 D 是点 C 的对应点, $OC : OD = 2 : 4 = 1 : 2, \therefore$ 点 A 的对应点是点 H. 故选 D.



3. (1) 【证明】 $\because \triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接等边三角形, $\therefore \angle BAC = 60^\circ, \therefore \angle BDC = 120^\circ$,

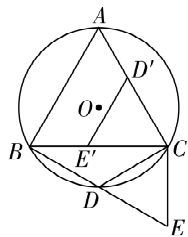
$\therefore \angle CDE = 60^\circ$.

$\because$ 点 D 是 $\widehat{BC}$ 的中点, $\therefore \widehat{BD} = \widehat{CD}$, $\therefore BD = CD$.

$\because BD = DE$, $\therefore CD = DE$, $\therefore \triangle CDE$ 是等边三角形.

(2) 【解】 $\triangle CDE$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 后与 $\triangle ABC$ 位似.

如图, $\triangle CD'E'$ 即为所求. (答案不唯一)

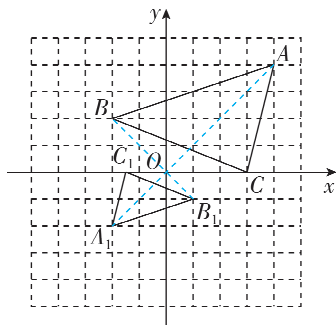


由(1)知 $\angle BDC = 120^\circ$, $BD = CD$, $\therefore \angle CBD = \angle BCD = 30^\circ$.

$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形,

$\therefore \angle ACB = 60^\circ$, $\angle DCE = 60^\circ$, $\therefore \angle ACD = \angle BCE = 90^\circ$, $\therefore \triangle CDE$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 后, 点 D, E 的对应点 D', E' 分别落在 AC, BC 上, $\therefore \triangle CD'E'$ 与 $\triangle CAB$ 位似.

4. 【解】(1) 如图, $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求. (答案不唯一)

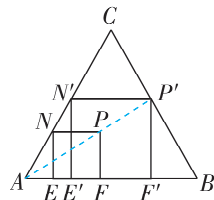


(2) $\triangle A_1B_1C_1$ 的三个顶点的坐标分别为

$A_1(-2, -2)$, $B_1(1, -1)$, $C_1(-\frac{3}{2}, 0)$.

发现: $\triangle A_1B_1C_1$ 各顶点的横坐标、纵坐标是 $\triangle ABC$ 对应顶点横坐标、纵坐标的 $-\frac{1}{2}$. (根据(1)中所画图形作答)

5. 【解】如图, 正方形 $E'F'P'N'$ 即为所求.



刷易错

6. $(2, 1)$ 或 $(-2, -1)$ 【解析】 $\because$ 以点 O 为位似中心把 $\triangle ABO$ 缩小, 且 $\frac{AO}{A_1O} = 2$, 点 A 的坐标是

关键点拨

(1) 解题的关键是利用圆内接四边形的性质得到 $\angle BDC$ 的度数.

关键点拨

判断矩形是否相似, 需判断长宽比是否相等.

易错警示

几何图形关于一点的位似图形有两个, 与原图形在位似中心同侧或异侧.

$(4, 2)$, $\therefore$ 点 A 的对应点 A_1 的坐标为 $(4 \times \frac{1}{2}, 2 \times \frac{1}{2})$ 或 $(-4 \times \frac{1}{2}, -2 \times \frac{1}{2})$, 即 A_1 的坐标为 $(2, 1)$ 或 $(-2, -1)$.

课时4 相似多边形的定义



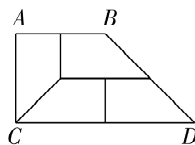
刷基础

1. C 【解析】A 选项, 两个直角三角形的对应角不一定相等, 对应边不一定成比例, 不符合相似的定义, 不符合题意; B 选项, 两个等腰三角形的对应角不一定相等, 对应边不一定成比例, 不符合相似的定义, 不符合题意; C 选项, 两个等边三角形的对应角一定相等, 对应边一定成比例, 符合相似的定义, 符合题意; D 选项, 两个菱形的对应边成比例, 对应角不一定相等, 不符合相似的定义, 不符合题意.

2. C 【解析】矩形甲的长宽比为 $\frac{9}{4}$, 矩形乙的长宽比为 $\frac{3}{2}$, 矩形丙的长宽比为 $\frac{4.5}{2} = \frac{9}{4}$. $\therefore \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$, $\frac{9}{4} \neq \frac{3}{2}$, 且矩形各内角都是 90° , $\therefore$ 甲、丙相似, 和乙不相似. 故选 C.

3. (1) 8 (2) 60° 【解析】(1) $\because \triangle ABO \sim \triangle CDO$, $\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{BO}{DO}$. $\because BO = 10, DO = 5, CD = 4$, $\therefore \frac{AB}{4} = \frac{10}{5}$, 解得 $AB = 8$. 故答案为 8.
(2) $\because \triangle ABC \sim \triangle DAC$, $\therefore \angle B = \angle DAC$. $\because \angle B = 50^\circ, \angle C = 20^\circ$, $\therefore \angle DAC = 50^\circ$, $\therefore \angle BAD = 180^\circ - \angle B - \angle DAC - \angle C = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ - 20^\circ = 60^\circ$. 故答案为 60° .

4. 【解】如图.



5. 【解】(1) 不相似.

理由如下: $\because$ 原矩形 $ABCD$ 的长 $AB = 6$, 宽 $BC = 4$, $\therefore$ 划分后小矩形的长 $AD = 4$, 宽 $AE = 6 \div 3 = 2$.

又 $\because \frac{AB}{BC} = \frac{6}{4} \neq \frac{4}{2} = \frac{AD}{AE}$, 即原矩形与每个小矩形的对应边不成比例, $\therefore$ 每个小矩形与原矩

形不相似.

(2) $\because$ 原矩形的长 $AB=a$, 宽 $BC=b$, $\therefore$ 划分后

小矩形的长 $AD=b$, 宽 $AE=\frac{a}{3}$. 又 $\because$ 每个小矩

形与原矩形相似, $\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{AE}$, $\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{a}{3}}$, 即

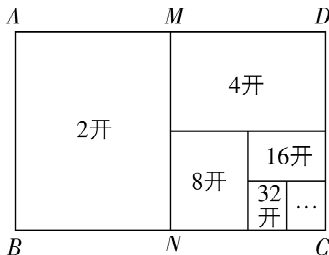
$$a^2 = 3b^2.$$

6. $\sqrt{2}:1$ 【解析】如图, 设矩形 $ABCD$ 的长 $AD=x$, 宽 $AB=CD=y$, 则 $DM=AM=\frac{1}{2}x$. $\therefore$ 矩形

$DMNC$ 与矩形 $ABCD$ 相似, $\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DM}$, 即 $\frac{x}{y} =$

$$\frac{y}{\frac{1}{2}x}, \therefore x:y = \sqrt{2}:1, \therefore \text{这些相似的矩形的长与宽的比是} \sqrt{2}:1.$$

$\therefore$ 易得 16 开的纸和 32 开的纸的相似比是 $\sqrt{2}:1$. 故答案为 $\sqrt{2}:1$.



7. 【解】相似. 理由: $\because$ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似, 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 相似, 相似具有传递性, $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 相似.

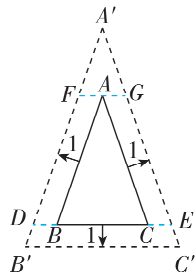
$\because$ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的相似比为 $k_1 = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与四边形

$A_2B_2C_2D_2$ 的相似比为 $k_2 = \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, $\therefore$ 四边形

$ABCD$ 与四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 的相似比是 $\frac{3}{8}$.

刷提升

1. C 【解析】如图(1), 延长 CB 交 $A'B'$ 于点 D , 延长 BC 交 $A'C'$ 于点 E , 过点 A 作 $FG \parallel BC$ 分别交 $A'B'$, $A'C'$ 于点 F , G . $\because AF \parallel BD$, $AB \parallel DF$, $\therefore$ 四边形 $ABDF$ 是平行四边形, $\therefore AB=FD$. 同理可得, 四边形 $ACEG$ 是平行四边形,



图(1)

$$\therefore AC=GE. \because FG \parallel DE \parallel B'C', \therefore \frac{A'F}{A'B'} = \frac{A'G}{A'C'},$$

思路分析

(2) 首先求出划分后小矩形的长 $AD=b$, 宽 $AE=\frac{a}{3}$, 再根据每个小矩形与原矩形相似, 可得 $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{AE}$, 从而可得 a 与 b 的关系式.

思路分析

由四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似, 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 相似, 可得四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 相似, 再结合 k_1, k_2 的值求解.

$$\frac{A'F}{FD} = \frac{A'G}{GE}, \therefore \frac{A'F}{A'G} = \frac{A'B'}{A'C'}, \frac{A'F}{A'G} = \frac{FD}{GE}, \therefore \frac{A'F}{A'G} = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC}, \text{即} \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}. \text{同理可得, } \frac{AB}{A'B'} =$$

$$\frac{BC}{B'C'}, \therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}. \because A'B' \parallel AB, DE \parallel$$

$B'C', \therefore \angle ABC = \angle A'DB = \angle A'B'C'$. 同理可得, $\angle ACB = \angle A'EC = \angle A'C'B'$, $\therefore \angle BAC = \angle B'A'C'$, $\therefore \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

如图(2), 延长 AB 交 $B'C'$ 于点 H , 延长 BA 交 $A'D'$ 于点 F , 延长 DA 交 $A'B'$ 于点 E , 延长 CB 交 $A'B'$ 于点 G , $\therefore AE=AF=A'E=A'F=1, BG=BH=B'G=B'H=1, EG=AB=4$, 图(2)

$$\therefore A'B'=6, \text{同理可得, } B'C'=C'D'=A'D'=6.$$

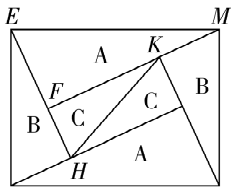
由题意得 $\angle EAF=90^\circ$, $\therefore$ 四边形 $AEA'F$ 是正方形, $\therefore \angle EA'F=90^\circ$, $\therefore$ 四边形 $A'B'C'D'$ 是正方形, $\therefore$ 正方形 $ABCD \sim$ 正方形 $A'B'C'D'$.

如图(3), 矩形 $ABCD$ 中, $AB=CD=4, BC=AD=6$, 同理可得, 矩形 $A'B'C'D'$ 中, $A'B'=C'D'=6, B'C'=A'D'=8$, $\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{2}{3}$, 图(3)

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{3}{4}, \frac{2}{3} \neq \frac{3}{4}, \therefore \text{矩形 } ABCD \text{ 与矩形 } A'B'C'D' \text{ 不是相似图形.}$$

综上所述, 新图形和旧图形是相似多边形的有 2 组. 故选 C.

2. A 【解析】如图. 设 B 纸片与 A 纸片的相似比为 k , $EF=m$, 则 $GH=KM=mk, FH=mk^2$, $\therefore EH=m(1+k^2), FM=\frac{m(1+k^2)}{k}$,



$$FK=km(1+k^2), \text{则 } km(1+k^2)+mk=\frac{m(1+k^2)}{k},$$

$$\text{整理得 } k^4+k^2-1=0, \therefore k^2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$(\text{舍去}). \therefore S_1=\frac{EF \cdot FM}{2}=\frac{m^2(1+k^2)}{2k}, S_2=\frac{GH \cdot EH}{2}=\frac{m^2k(1+k^2)}{2}, S_3=\frac{FH \cdot FK}{2}=\frac{m^2k^3(1+k^2)}{2}, \therefore S_2=k^2S_1, S_3=k^4S_1, \therefore S_2=$$

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}S_1, S_3=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2S_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}S_1, \therefore S_2+$$

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}S_1, S_3=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2S_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}S_1, \therefore S_2+$$

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}S_1, S_3=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2S_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}S_1, \therefore S_2+$$

$S_3 = S_1$, $\therefore$ 这个矩形的面积 $= 2S_1 + 2(S_2 + S_3) = 4S_1$. 故选 A.

3. $2\sqrt{3}$ 【解析】如图, 设直线 l_2 交 AD 于点 M , 交 BC 于点 N . 由矩形的性质可得 $AD = BC = m$. 由折叠的性质可得 $AF = FM$, $DM = FM$, $\therefore AF = FM = DM$. $\therefore AD = BC = m$, $\therefore AF = \frac{1}{3}m$. $\therefore$ 矩形 $ABEF \sim$ 矩形 $BCDA$, $\therefore AF : AB = AB : BC$, $\therefore \frac{1}{3}m : 2 = 2 : m$, $\therefore m = 2\sqrt{3}$ (负值已舍去). 故答案为 $2\sqrt{3}$.

4. $\frac{40}{9}$ 或 5 【解析】设 $BF = x$, $\therefore B'F = BF = x$, $FC = BC - BF = 10 - x$. 当 $\triangle CFB' \sim \triangle CBA$ 时, $\frac{CF}{CB} = \frac{FB'}{BA}$, 即 $\frac{10-x}{10} = \frac{x}{8}$, 解得 $x = \frac{40}{9}$; 当 $\triangle CFB' \sim \triangle CAB$ 时, $\frac{CF}{CA} = \frac{FB'}{AB}$, 即 $\frac{10-x}{8} = \frac{x}{8}$, 解得 $x = 5$. 综上所述, 当 $BF = \frac{40}{9}$ 或 5 时, 以点 B' , F , C 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似. 故答案为 $\frac{40}{9}$ 或 5.

刷素养

5. (1) A (2) ①相似比 ②相似比的平方 ③相似比的立方 【解析】(1) 选项 A, 两个球体的形状完全相同, 是相似体; 选项 B, 对于两个圆锥, 如果底面半径或高发生变化, 它们的形状就会改变, 不是相似体; 选项 C, 对于两个圆柱, 如果底面半径或高发生变化, 它们的形状就会改变, 不是相似体; 选项 D, 对于两个长方体, 如果长、宽、高中有一个发生变化, 它们的形状就会改变, 不是相似体. 故选 A. (2) ①相似体的一切对应线段 (或弧) 长的比等于相似比; ②相似体表面积之比等于相似比的平方; ③相似体体积之比等于相似比的立方. 故答案为 ①相似比, ②相似比的平方, ③相似比的立方.

7.2 相似三角形的判定

课时 1 相似三角形的判定定理 1

刷基础

1. C 【解析】①所有的等边三角形都相似, 故①正确; ②等腰三角形的两个底角相等, 因此有一个底角相等的两个等腰三角形相似, 故②

思路分析

设直线 l_2 交 AD 于点 M , 交 BC 于点 N . 由折叠的性质得到 $AF = FM = DM$, 求出 $AF = \frac{1}{3}m$, 由相似多边形的性质推出 $AF : AB = AB : BC$, 代入有关数据即可求出 m 的值.

思路分析

设 $BF = x$, 分 $\triangle CFB' \sim \triangle CBA$ 和 $\triangle CFB' \sim \triangle CAB$ 两种情况列出方程求解即可.

正确; ③如果一个等腰三角形的顶角与另一个等腰三角形的底角相等, 那么这两个等腰三角形不一定相似, 故③错误; ④都有一个 15° 角的两个直角三角形相似, 故④正确. 综上, 正确的说法是①②④. 故选 C.

2. C 【解析】 $\because AC = BC$, $\angle C = 36^\circ$, $\therefore \angle B = \angle BAC = 72^\circ$. $\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $\therefore \angle BAD = \angle CAD = 36^\circ$, $\therefore \angle BAD = \angle C = \angle CAD = 36^\circ$, $\therefore AD = CD$, $\angle ADB = 72^\circ$, $\therefore \angle ADB = \angle B$, $\therefore AB = AD$, $\therefore AB = AD = CD$. $\therefore \angle ABD = \angle CBA$, $\angle BAD = \angle C$, $\therefore \triangle ABD \sim \triangle CBA$, $\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC}$. 设 $BC = AC = a$, $BD = x$, 则 $AD = CD = AB = a - x$, $\therefore \frac{x}{a-x} = \frac{a-x}{a}$, 解得 $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}a$ (不符合题意, 舍去) 或 $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a$, $\therefore AB = a - x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$, $\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 故选 C.

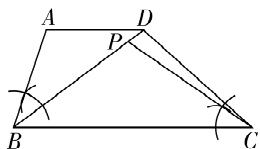
3. A 【解析】A 选项, 不一定存在相似三角形, 故本选项符合题意. B 选项, $\because \angle BCA = \angle AED = 90^\circ$, $\angle CAF = \angle DAE$, $\therefore \triangle ACF \sim \triangle AED$, 故本选项不符合题意. C 选项, 设 CB 与 AE 交于点 O . $\because \angle ACO = \angle FEO = 90^\circ$, $\angle AOC = \angle FOE$, $\therefore \triangle ACO \sim \triangle FEO$, 故本选项不符合题意. D 选项, $\because AD = AB$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle D = 45^\circ$, $\therefore AC = \frac{1}{2}AB$, $AE = \frac{\sqrt{2}}{2}AD = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$, $\therefore CE = \sqrt{AE^2 - AC^2} = \frac{1}{2}AB$, $\therefore AC = EC$, $\therefore \angle CAE = 45^\circ = \angle EAD$. 又 $\because \angle C = \angle AED = 90^\circ$, $\therefore \triangle ACE \sim \triangle AED$, 故本选项不符合题意. 故选 A.

4. C 【解析】 $\because \angle A = \angle A$, $\angle AEC = \angle ADB = 90^\circ$, $\therefore \triangle AEC \sim \triangle ADB$, $\therefore \angle ACE = \angle ABD$. 又 $\because \angle AEC = \angle BEC = 90^\circ$, $\therefore \triangle AEC \sim \triangle FEB$. $\therefore \angle ACE = \angle FCE$, $\angle AEC = \angle FDC = 90^\circ$, $\therefore \triangle AEC \sim \triangle FDC$, $\therefore$ 题图中与 $\triangle AEC$ 一定相似的三角形有 3 个. 故选 C.

5. $\triangle CDA$ (或 $\triangle BAE$) 【解析】 $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle AFG$ 是两个全等的等腰直角三角板, $\therefore \angle FAG = \angle ACB = 45^\circ$. $\therefore \angle ADE = \angle CDA$, $\therefore \triangle ADE \sim \triangle CDA$, 同理可得 $\triangle ADE \sim \triangle BAE$, 故答案为 $\triangle CDA$ (或 $\triangle BAE$).

6. $\frac{9}{5}$ 【解析】 $\because CD$ 是斜边 AB 上的高,
 $\angle ACB = 90^\circ, \therefore \angle ACB = \angle ADC = 90^\circ$.
 又 $\because \angle BAC = \angle CAD, \therefore \triangle ADC \sim \triangle ACB$,
 $\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$. $\because \angle ACB = 90^\circ, AC = 3, BC = 4$,
 $\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5, \therefore AD = \frac{AC^2}{AB} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}$.

7. 【解】如图所示.



8. 【证明】 $\because EF$ 垂直平分线段 $OA, \therefore FA = FO$,
 $\therefore \angle FAO = \angle FOA$.
 $\because OD = OB, \therefore \angle DBO = \angle ODB$.
 $\because \angle DBO = \frac{1}{2} \angle AOD = \angle FOA, \therefore \angle FAO =$
 $\angle FOA = \angle DBO = \angle ODB, \therefore \triangle AFO \sim \triangle BOD$.

刷易错

9. 【解】 $\because \angle A = \angle A' = 45^\circ, \angle B = 26^\circ, \angle B' =$
 $109^\circ, \therefore \angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 45^\circ -$
 $26^\circ = 109^\circ. \therefore \angle B' = 109^\circ, \therefore \angle C = \angle B'$.
 又 $\because \angle A = \angle A', \therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

刷提升

1. B 【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形, $AF \perp BE$,
 $\therefore \angle ABC = \angle C = \angle AFB = \angle BFG = 90^\circ$.
 又 $\because \angle BAF = \angle BAG, \angle FBG = \angle CBE, \therefore \triangle AFB \sim$
 $\triangle ABG, \triangle BFG \sim \triangle BCE. \therefore \angle BAF + \angle ABF =$
 $90^\circ = \angle GBF + \angle ABF, \therefore \angle BAF = \angle GBF$,
 $\therefore \triangle AFB \sim \triangle BFG, \therefore \triangle AFB \sim \triangle ABG \sim$
 $\triangle BFG \sim \triangle BCE$. 综上, $\triangle AFB \sim \triangle ABG$,
 $\triangle AFB \sim \triangle BFG, \triangle AFB \sim \triangle BCE, \triangle ABG \sim$
 $\triangle BFG, \triangle ABG \sim \triangle BCE, \triangle BFG \sim \triangle BCE$,
 $\therefore$ 有 6 对相似三角形. 故选 B.

2. C 【解析】如图, 过点 O 分别作 $OF \perp AB$ 于 F ,
 $OE \perp BC$ 于 E , 则易得 $\angle EOF = 90^\circ. \therefore \angle POQ =$
 $\angle EOF = 90^\circ, \therefore \angle NOF =$
 $\angle MOE. \therefore \angle NFO = \angle MEO = 90^\circ, \therefore \triangle NOF \sim$
 $\triangle MOE, \therefore \frac{NF}{OF} = \frac{ME}{OE}. \because AB = 4, AD = 6, BM = x,$
 $AN = y, \therefore NF = |2 - y|, ME = |3 - x|, OF = 3,$

易错警示

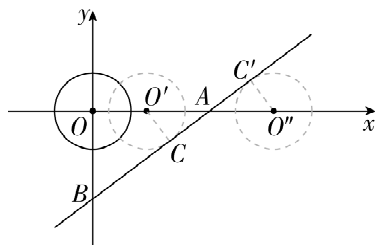
易受思维定式的干扰, 误认为点 B 的对应点就是点 B' , 而 $\angle B \neq \angle B'$, 错误地判断两三角形不相似.

思路分析

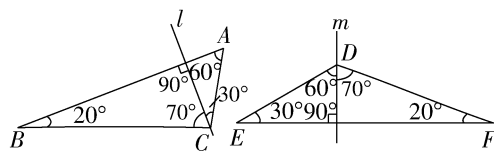
过点 O 分别作 $OF \perp AB$ 于 $F, OE \perp BC$ 于 E , 易证明 $\triangle NOF \sim \triangle MOE$, 根据相似三角形对应边成比例即可得到 y 与 x 之间的函数关系式, 从而判断图象.

$OE = 2, \therefore \frac{|2 - y|}{3} = \frac{|3 - x|}{2}. \therefore$ 易知 $(2 - y)(3 - x) \geq 0, \therefore y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}. \therefore 0 \leq y \leq 4, \therefore 0 \leq \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \leq 4, \therefore \frac{5}{3} \leq x \leq \frac{13}{3}, \therefore y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \left(\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{13}{3} \right)$. 故选 C.

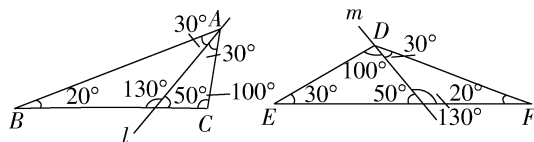
3. $\frac{7}{3}$ 或 $\frac{17}{3}$ 【解析】对于 $y = \frac{3}{4}x - 3$, 当 $x = 0$ 时,
 $y = -3$; 当 $y = 0$ 时, $x = 4, \therefore A(4, 0), B(0, -3),$
 $\therefore OA = 4, OB = 3, \therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} =$
 $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. 设运动时间为 t 秒, 则动圆圆心
 坐标为 $(t, 0)$. 当动圆与直线 AB 相切时, 圆心
 到直线 AB 的距离等于半径 1. 当圆心在点 A
 左侧时, 过圆心 O' 作 $O'C \perp AB$ 于 C , 如图, 则
 $O'C = 1, \angle O'CA = \angle AOB = 90^\circ$. 又 $\because \angle O'AC =$
 $\angle BAO, \therefore \triangle AO'C \sim \triangle ABO, \therefore \frac{O'C}{BO} = \frac{AO'}{AB}.$
 $\therefore O'C = 1, OB = 3, AO' = 4 - t, AB = 5, \therefore \frac{1}{3} =$
 $\frac{4 - t}{5}$, 解得 $t = \frac{7}{3}$. 当圆心在点 A 右侧时, 作
 $O''C' \perp AB$ 于 C' , 则 $O''C' = 1, AO'' = t - 4$. 同理可
 得 $\frac{O''C'}{OB} = \frac{AO''}{AB}$, 即 $\frac{1}{3} = \frac{t - 4}{5}$, 解得 $t = \frac{17}{3}$. 综上, 运
 动 $\frac{7}{3}$ 秒或 $\frac{17}{3}$ 秒时, 动圆与直线 AB 相切. 故答
 案为 $\frac{7}{3}$ 或 $\frac{17}{3}$.



4. 【解】方法一:



方法二:



5. (1) 【证明】 $\because$ 四边形 $DEFG$ 是矩形, $\therefore GF \parallel AB$, $\therefore \angle CGF = \angle A$.

$\therefore \angle GCF = \angle ACB$, $\therefore \triangle GCF \sim \triangle CAB$.

(2) 【证明】 $\because$ 四边形 $DEFG$ 是矩形, $\therefore \angle EDG = \angle DEF = 90^\circ$, $\therefore \angle ADG = \angle BEF = 90^\circ$, $\therefore \angle B + \angle EFB = 90^\circ$.

$\because \angle C = 90^\circ$, $\therefore \angle B + \angle A = 90^\circ$, $\therefore \angle EFB = \angle A$, $\therefore \triangle ADG \sim \triangle FEB$.

(3) 【解】在 $\text{Rt} \triangle ADG$ 中, $\because AD = 4, AG = 5$, $\therefore DG = \sqrt{AG^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

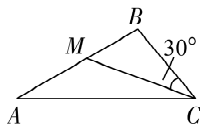
$\because$ 四边形 $DEFG$ 是矩形, $\therefore EF = DG = 3$.

由(2)知 $\triangle ADG \sim \triangle FEB$, $\therefore \frac{AD}{EF} = \frac{DG}{BE}$, 即 $\frac{4}{3} = \frac{3}{BE}$.

$\therefore BE = \frac{9}{4}$. 故答案为 $\frac{9}{4}$.

刷素养

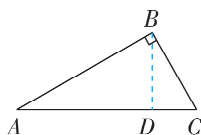
6. 【解】(1) ①如图(1)所示.



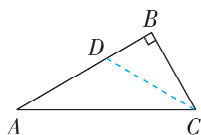
图(1)

②当 $\angle CBD = 30^\circ$ 时, 如图(2), 则 $DC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}$.

$\therefore BD = \sqrt{BC^2 - DC^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



图(2)



图(3)

当 $\angle BCD = 30^\circ$ 时, 如图(3), 设 $BD = x (x > 0)$,

则 $DC = 2x$, $\therefore (2x)^2 = x^2 + 1$, $\therefore x = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore DC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

综上, $\triangle ABC$ 的“形似线段”的长是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故答案为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2) ①若 $\triangle DEG \sim \triangle DFE$, 则 $\frac{EG}{EF} = \frac{DE}{DF}$.

$\because DE = 5, EF = 6, DF = 8$, $\therefore EG = \frac{15}{4}$.

关键点拨

(1) 由矩形 $DEFG$ 可得 $GF \parallel AB$, 则 $\angle CGF = \angle A$, 再由 $\angle C$ 是公共角, 即可证明 $\triangle GCF \sim \triangle CAB$.
(2) 先证明 $\angle EFB = \angle A$, 进而可证明 $\triangle ADG \sim \triangle FEB$.
(3) 根据勾股定理和相似三角形的性质即可求解.

思路分析

(1) ② 分 $\angle CBD = 30^\circ$ 和 $\angle BCD = 30^\circ$ 两种情况讨论, 结合勾股定理求解. (2) 分 $\triangle DEG \sim \triangle DFE$ 和 $\triangle FEG \sim \triangle FDE$ 两种情况讨论, 结合 $DE = 5, EF = 6, DF = 8$ 进行求解.

②若 $\triangle FEG \sim \triangle FDE$, 则 $\frac{EG}{DE} = \frac{EF}{DF}$. $\because DE = 5, EF = 6, DF = 8$, $\therefore EG = \frac{15}{4}$. 综上所述, $EG = \frac{15}{4}$.

课时2 相似三角形的判定定理2



刷基础

1. A 【解析】由题图得, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 135^\circ, AC = \sqrt{2}, BC = 2$. B、C、D 选项中的三角形都没有 135° 的角. A 选项中三角形的钝角为 135° , 它的两边长分别为 1 和 $\sqrt{2}$. 因为 $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1}$, 所以 A 选项中的三角形与 $\triangle ABC$ 相似. 故选 A.

2. D 【解析】 $\because \angle 1 = \angle 2$, $\therefore \angle BAC = \angle DAE$. 添加 $\angle C = \angle E$, 根据两角分别相等的两个三角形相似, 可判定 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, 故 A 选项不符合题意. 添加 $\angle B = \angle E$, 根据两角分别相等的两个三角形相似, 可判定 $\triangle ABC \sim \triangle AED$, 故 B 选项不符合题意. 添加 $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$, 根据两边成比例且夹角相等的两个三角形相似, 可判定 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, 故 C 选项不符合题意. 添加 $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$, 不能判定 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 相似, 故本选项符合题意. 故选 D.

3. D 【解析】A 选项, 剪开得到的三角形与原三角形有两个角分别相等, 可以判定两三角形相似, 故 A 选项不符合题意; B 选项, 剪开得到的三角形与原三角形的两组对应边成比例且夹角相等, 可以判定两三角形相似, 故 B 选项不符合题意; C 选项, 剪开得到的三角形与原三角形有两个角分别相等, 可以判定两三角形相似, 故 C 选项不符合题意; D 选项, 两三角形的对应边成比例, 但夹角不一定相等, 不能判定两三角形相似, 故 D 选项符合题意. 故选 D.

4. 4 【解析】 $\because AC$ 平分 $\angle BAD$, $\therefore \angle BAC = \angle DAC$. 当 $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$ 时, $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, 即 $AC^2 = AB \cdot AD$. $\because AB = 9, AC = 6$, $\therefore 6^2 = 9AD$, $\therefore AD = 4$. 故答案为 4.

5. GCA 【解析】设正方形的边长为 a , 则 $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$. $\because \frac{AC}{CF} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}, \frac{CG}{AC} = \frac{2a}{\sqrt{2}a} = \sqrt{2}$, $\therefore \frac{AC}{CF} = \frac{CG}{AC}$, 且 $\angle ACF = \angle GCA$, $\therefore \triangle ACF \sim \triangle GCA$. 故答案为 GCA.

$\sqrt{2}$, $\therefore \frac{AC}{CF} = \frac{CG}{AC}$. 又 $\because \angle ACF = \angle GCA$, $\therefore \triangle ACF \sim \triangle GCA$.

6. (1) 【证明】 $\because AE \cdot AB = AD \cdot AC$, $\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$.

又 $\because \angle A = \angle A$, $\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$.

(2) 【解】 $\because$ 点 E 为 AB 的中点, $AB = 20$,

$\therefore AE = \frac{1}{2}AB = 10$. $\because AD:AE = 6:5$, $\therefore AD = 12$.

由 (1) 可知 $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$, $\therefore \frac{10}{AC} = \frac{12}{20}$, $\therefore AC = \frac{50}{3}$,

$\therefore CD = AC - AD = \frac{50}{3} - 12 = \frac{14}{3}$.

7. 【证明】 $\because AC, AF$ 分别是正方形 $ABCD$ 和正方形 $AEFG$ 的对角线, $\therefore \triangle ADC$ 和 $\triangle AGF$ 都是等腰直角三角形, $\therefore \angle DAC = \angle GAF = 45^\circ$, 由

勾股定理易得 $\frac{AD}{AC} = \frac{AG}{AF} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore \angle DAG + \angle CAG = \angle CAF + \angle CAG$, $\therefore \angle DAG = \angle CAF$,

$\therefore \triangle AFC \sim \triangle AGD$.

刷易错

8. 2 或 8 或 5 【解析】①当 $\frac{AD}{PC} = \frac{PD}{BC}$ 时, $\triangle APD \sim \triangle PBC$, 此时 $\frac{4}{10-PD} = \frac{PD}{4}$, 解得 $PD = 2$ 或 $PD = 8$;

②当 $\frac{AD}{BC} = \frac{PD}{PC}$ 时, $\triangle PAD \sim \triangle PBC$, 此时 $\frac{4}{4} = \frac{PD}{10-PD}$, 解得 $PD = 5$. 综上所述, DP 的长为 2 或 8 或 5. 故答案为 2 或 8 或 5.

课时 3 相似三角形的判定定理 3

刷基础

1. C 【解析】A 选项, 由 $\angle A = \angle D$, 可以根据两边成比例且夹角相等, 推出两三角形相似, 本选项不符合题意; B 选项, 由 $\angle B = \angle E$, 可以推出 $\angle A = \angle D$, 根据两边成比例且夹角相等, 推出两三角形相似, 本选项不符合题意; C 选项, 由 $\angle A = \angle E$, 不能判定两三角形相似, 本选项符合题意; D 选项, 由 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$, 可以推出

$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$, 根据三边成比例推出两三角形相似, 本选项不符合题意. 故选 C.

2. B 【解析】设每个小正方形的边长为 1, 则在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 1$, $AC = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{5}$. A 选项,

思路分析

(1) 根据已知条件得到 $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$, 再根据两边成比例且夹角相等的两个三角形相似进行证明即可.

(2) 先求出 $AE = \frac{1}{2}AB = 10$, 再根据 $AD:AE = 6:5$ 求出 $AD = 12$. 根据 $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$ 求出 $AC = \frac{50}{3}$, 即可得出答案.

即可得出答案.

即可得出答案.

即可得出答案.

易错警示

表述相似时, 若利用相似符号“ $\sim$ ”表示, 则相似三角形的对应边、对应角是确定的; 若用文字表述, 则对应边、对应角不确定, 注意分类讨论.

在 $\triangle BDE$ 中, $DE = 2$, $BD = 2\sqrt{2}$, $BE = 2\sqrt{5}$.

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{1}{2}$, $\frac{AC}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, $\frac{BC}{BE} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$,

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{BD} = \frac{BC}{BE}$, $\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEB$, 故 A 选项

不符合题意. B 选项, 在 $\triangle BCD$ 中, $CD = 1$,

$BC = \sqrt{5}$, $BD = 2\sqrt{2}$. $\therefore \frac{AB}{CD} = 1$, $\frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$,

$\frac{BC}{BD} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$, $\therefore \frac{AB}{CD} \neq \frac{AC}{BC} \neq \frac{BC}{BD}$, $\therefore \triangle ABC$ 和

$\triangle BCD$ 不相似, 故 B 选项符合题意. C 选项,

在 $\triangle FGH$ 中, $HG = \sqrt{2}$, $FH = 2$, $FG = \sqrt{10}$.

$\therefore \frac{AB}{HG} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{AC}{FH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{BC}{FG} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore \frac{AB}{HG} = \frac{AC}{FH} = \frac{BC}{FG}$, $\therefore \triangle ABC \sim \triangle HGF$, 故 C 选项

不符合题意. D 选项, 在 $\triangle BFG$ 中, $BF = \sqrt{5}$,

$FG = \sqrt{10}$, $BG = 5$. $\therefore \frac{AB}{BF} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{AC}{FG} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{BC}{BG} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\therefore \frac{AB}{BF} = \frac{AC}{FG} = \frac{BC}{BG}$, $\therefore \triangle ABC \sim \triangle FBG$, 故 D 选项不符合题意. 故选 B.

3. C 【解析】设 $\triangle DEF$ 的另外两条边长分别为 x cm, y cm ($x < y$). 若 $\triangle DEF$ 中长为 4 cm 的边的对应边的长为 6 cm, 则 $\frac{4}{6} = \frac{x}{7.5} = \frac{y}{9}$, 解得

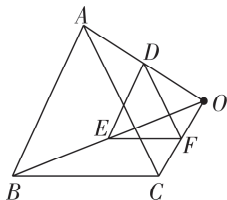
$x = 5$, $y = 6$; 若 $\triangle DEF$ 中长为 4 cm 的边的对应边的长为 7.5 cm, 则 $\frac{4}{7.5} = \frac{x}{6} = \frac{y}{9}$, 解得 $x = 3.2$, $y = 4.8$; 若 $\triangle DEF$ 中长为 4 cm 的边的对应边的长为 9 cm, 则 $\frac{4}{9} = \frac{x}{6} = \frac{y}{7.5}$, 解得 $x = \frac{8}{3}$,

$y = \frac{10}{3}$. 故选 C.

4. 135° 【解析】设小正方形的边长为 1. 由题意, 得 $\angle ABC = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$, $AC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, $AB = 2$, $BC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $DF = 5$, $DE = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, $EF = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $\therefore \frac{AC}{DF} = \frac{\sqrt{10}}{5}$, $\frac{AB}{DE} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$, $\frac{CB}{FE} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$, $\therefore \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} = \frac{CB}{FE}$, $\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$, $\therefore \angle DEF = \angle ABC = 135^\circ$. 故答案为 135° .

5. (1) 【证明】 $\because$ 点 D, E, F 分别为 OA, OB, OC 的中点, $\therefore DE, EF, DF$ 分别是 $\triangle AOB, \triangle BCO, \triangle AOC$ 的中位线, $\therefore DE = \frac{1}{2}AB, EF = \frac{1}{2}BC, DF = \frac{1}{2}AC, \therefore \frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = \frac{1}{2}, \therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$.

(2) 【解】画出图形如图.



(1) 中的结论仍然成立.

理由: $\because$ 点 D, E, F 分别为 OA, OB, OC 的中点, $\therefore DE, EF, DF$ 分别是 $\triangle AOB, \triangle BCO, \triangle AOC$ 的中位线, $\therefore DE = \frac{1}{2}AB, EF = \frac{1}{2}BC, DF = \frac{1}{2}AC, \therefore \frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = \frac{1}{2}, \therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$.

6. D 【解析】A 选项, 由 $\angle C = \angle AED = 90^\circ, \angle CAB = \angle D$, 可知 $\triangle ACB \sim \triangle DEA$, 故本选项不符合题意; B 选项, 由 $AD \parallel BC$, 可得 $\angle B = \angle DAE$, 结合 $\angle C = \angle AED = 90^\circ$, 可得 $\triangle ACB \sim \triangle DEA$, 故本选项不符合题意; C 选项, 由 $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{DE}$, 可得 $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DE}$, 结合 $\angle C = \angle AED = 90^\circ$, 可得 $\text{Rt} \triangle ACB \sim \text{Rt} \triangle DEA$, 故本选项不符合题意; D 选项, 由 $\frac{BC}{AC} = \frac{AD}{AE}$, 无法判定 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DAE$ 相似, 故本选项符合题意. 故选 D.

7. 相似 【解析】 $\because$ 两个直角三角形的一条直角边长分别为 1, 4, 斜边长分别为 3, 12, 且 $1:4=3:12, \therefore$ 这两个直角三角形相似, 故答案为相似.

刷易错

8. 5 或 $\sqrt{7}$ 【解析】根据题意, 两条边长分别是 6 和 8 的直角三角形有两种情况, 一种是 6 和 8 为直角边长, 那么根据勾股定理可知斜边长为 10; 另一种是 6 是直角边长, 8 是斜边长, 那么根据勾股定理可知另一条直角边长为 $2\sqrt{7}$. 所以另一个与它相似的直角三角形也有两种情况, 第一种是 $\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{x}$, 解得

思路分析

(1) 根据点 D, E, F 分别为 OA, OB, OC 的中点, 可以得出 DE, EF, DF 分别是 $\triangle AOB, \triangle BCO, \triangle AOC$ 的中位线, 进而可得 $DE = \frac{1}{2}AB, EF = \frac{1}{2}BC, DF = \frac{1}{2}AC$, 最后根据三边成比例的两个三角形相似, 即可得证.

思路分析

(2) 取格点 H , 连接 CH , 由 $\triangle ADC \sim \triangle ACB$, BM, CM 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ACD$, 得到 $\angle ABM = \angle CBM = \angle DCM = \angle ACM$, 从而推出 $\angle BMC = \angle BDC$, 再利用勾股定理及等边对等角求解即可.

易错警示

两条边长分别是 6 和 8 的直角三角形, 没有明确直角边和斜边, 应分情况讨论, 本题容易漏掉第二种情况.

$x=5$; 第二种是 $\frac{6}{3} = \frac{2\sqrt{7}}{x} = \frac{8}{4}$, 解得 $x = \sqrt{7}$. 综上所述, $x=5$ 或 $\sqrt{7}$.



刷提升

1. B 【解析】要满足三角形的两边之和大于第三边, 则长 120 cm 的木条不能作为一边. 设从长 120 cm 的木条上截下的两段长分别为 x cm, y cm ($x < y, x+y \leq 120$). 由于 $x+y \leq 120$, 则长 60 cm 的木条不能与长 75 cm 的一边对应. 当长 60 cm 的木条与长 100 cm 的一边对应时, $\frac{x}{75} = \frac{y}{120} = \frac{60}{100}$, 解得 $x=45, y=72$; 当长 60 cm 的木条与长 120 cm 的一边对应时, $\frac{x}{75} = \frac{y}{120} = \frac{60}{120}$, 解得 $x=37.5, y=50$, $\therefore$ 有两种不同的截法: 把长 120 cm 的木条截成 45 cm, 72 cm 两段或把长 120 cm 的木条截成 37.5 cm, 50 cm 两段. 故选 B.

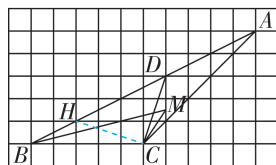
2. ② 【解析】设小正方形的边长为 1. 由题意可得“帅”“相”之间的距离为 $2\sqrt{5}$, “兵”“相”之间的距离为 2, “兵”“帅”之间的距离为 $4\sqrt{2}$. 当“马”落在②处时, “马”“车”之间的距离为 $2\sqrt{2}$, “车”“炮”之间的距离为 1, “炮”“马”之间的距离为 $\sqrt{5}$. $\therefore \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{1} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, \therefore$ “马”落在②处时, 以“马”“车”“炮”所在位置的格点为顶点的三角形与以“帅”“相”“兵”所在位置的格点为顶点的三角形相似. 故答案为②.

3. 【解】(1) $\triangle ADC \sim \triangle ACB$. 证明如下:

由题意得 $AD=2\sqrt{5}, AC=5\sqrt{2}, DC=\sqrt{10}, BC=5, AB=5\sqrt{5}$,

$$\therefore \frac{DC}{BC} = \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{10}}{5}, \therefore \triangle ADC \sim \triangle ACB.$$

(2) 如图, 取格点 H , 连接 CH .



由 $\triangle ADC \sim \triangle ACB$ 得 $\angle ACD = \angle ABC$.

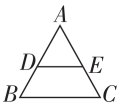
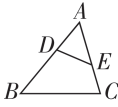
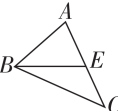
又 $\because BM, CM$ 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ACD$,

$\therefore \angle ABM = \angle CBM = \angle DCM = \angle ACM$,

大招专题2 相似三角形判定的常考模型



大招解读 | A 字型

正 A 字型	斜 A 字型 (共角)	斜 A 字型 (共角、共边)
 已知: $DE \parallel BC$. 结论: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$	 已知: $\angle ADE = \angle C$. 结论: $\triangle ADE \sim \triangle ACB$	 已知: $\angle ABE = \angle C$. 结论: $\triangle ABE \sim \triangle ACB$

关键点拔

先得到 $AD = \frac{1}{2}AC = 2$, 再分 $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC}$ 与 $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ 两种情况讨论即可解答.

关键点拔

(2) 作平行线构造相似三角形是解题的关键.

$$\therefore \angle BMC = 180^\circ - \angle MBC - \angle BCD - \angle DCM = 180^\circ - \angle ABM - \angle CBM - \angle BCD = \angle BDC.$$

由勾股定理可得 $CH = \sqrt{10}$, $CD = \sqrt{10}$, $DH = 2\sqrt{5}$.

$$\therefore CH^2 + CD^2 = 20 = DH^2, \therefore \angle DCH = 90^\circ.$$

$$\text{又} \because CH = CD, \therefore \angle BMC = \angle BDC = \angle CHD = 45^\circ.$$

刷素养

4. 【解】(1) $\because \frac{AD}{AB} = \frac{A'D'}{A'B'}, \therefore \frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'}$

$$\therefore \frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'},$$

$$\therefore \frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D'}, \therefore \triangle ADC \sim \triangle A'D'C',$$

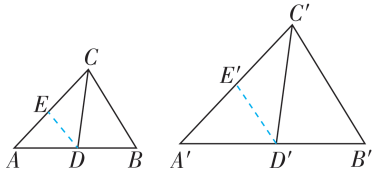
$$\therefore \angle A = \angle A'.$$

$$\therefore \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}, \therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

故答案为 $\frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D'}$, $\angle A = \angle A'$.

(2) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

理由如下: 如图, 过点 D, D' 分别作 $DE \parallel BC$, $D'E' \parallel B'C'$, DE 交 AC 于 E , $D'E'$ 交 $A'C'$ 于 E' .



$$\therefore DE \parallel BC, \therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}.$$

同理, $\frac{A'D'}{A'B'} = \frac{D'E'}{B'C'} = \frac{A'E'}{A'C'}$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{A'D'}{A'B'}, \therefore \frac{DE}{BC} = \frac{D'E'}{B'C'}, \therefore \frac{DE}{D'E'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

同理, $\frac{AE}{AC} = \frac{A'E'}{A'C'}, \therefore \frac{AC-AE}{AC} = \frac{A'C'-A'E'}{A'C'},$

即 $\frac{EC}{AC} = \frac{E'C'}{A'C'}, \therefore \frac{EC}{E'C'} = \frac{AC}{A'C'}$

$$\therefore \frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}, \therefore \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EC}{E'C'},$$

$$\therefore \triangle DCE \sim \triangle D'E'C', \therefore \angle CED = \angle C'E'D'.$$

$$\therefore DE \parallel BC, \therefore \angle CED + \angle ACB = 180^\circ,$$

同理, $\angle C'E'D' + \angle A'C'B' = 180^\circ, \therefore \angle ACB = \angle A'C'B'.$

$$\text{又} \because \frac{AC}{A'C'} = \frac{CB}{C'B'}, \therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

1. 3 或 $\frac{4}{3}$ 【解析】 $\because D$ 为 AC 中点, $\therefore AD = \frac{1}{2}AC = 2$. 当 $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC}$ 时, $\therefore \angle A = \angle A, \therefore \triangle AED \sim \triangle ABC$, 此时 $AE = \frac{AB \cdot AD}{AC} = \frac{6 \times 2}{4} = 3$; 当 $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ 时, $\therefore \angle A = \angle A, \therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$, 此时

$$AE = \frac{AC \cdot AD}{AB} = \frac{4 \times 2}{6} = \frac{4}{3}.$$

综上, $AE = 3$ 或 $\frac{4}{3}$. 故

答案为 3 或 $\frac{4}{3}$.

2. B 【解析】 $\because BE, CD$ 为 $\triangle ABC$ 的两条高, $\therefore \angle AEB = \angle ADC = 90^\circ. \therefore \angle A = \angle A, \therefore \triangle AEB \sim \triangle ADC, \therefore \frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC}. \therefore \angle A = \angle A, \therefore \triangle AED \sim \triangle ABC, \therefore \frac{ED}{BC} = \frac{AE}{AB}. \therefore AB = 6, BC = 5, ED = 3,$

$$\therefore \frac{3}{5} = \frac{AE}{6}, \therefore AE = \frac{18}{5}, \therefore BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{18}{5}\right)^2} = \frac{24}{5}.$$

故选 B.

大招解读 | 8 字型

正 8 字型

斜 8 字型 (蝴蝶型)

已知: $AB \parallel CD$.
结论: $\triangle ABE \sim \triangle DCE$

已知: $\angle B = \angle D$.
结论: $\triangle AOB \sim \triangle COD$

3. $\sqrt{3} - 1$ 【解析】在 $\text{Rt} \triangle ABE$ 中, $\angle B = 30^\circ$,

$$AB = \sqrt{3}, \therefore AE = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{由勾股定理得, } BE = \frac{3}{2}.$$

根据翻折的性质可得 $BF = 2BE = 3$, $\therefore CF = 3 - \sqrt{3}$. $\therefore AD \parallel CF$, $\therefore \triangle ADG \sim \triangle FCG$, $\therefore \frac{AD}{CF} =$

$$\frac{DG}{CG}. \text{ 设 } CG = x, \text{ 则 } \frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-x}{x}, \text{ 解得 } x = \sqrt{3}-1,$$

故答案为 $\sqrt{3}-1$.

4. $\frac{mn}{m+n}$ 【解析】 $\because AB = m, CD = n, E, F$ 分别是

AB, CD 的中点, $\therefore DF = CF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}n, AE =$

$$BE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}m. \because AB \parallel CD, \therefore \angle DFG =$$

$$\angle EAG, \angle CFH = \angle EBH. \therefore \angle DGF = \angle EGA,$$

$$\angle CHF = \angle EHB, \therefore \triangle DGF \sim \triangle EGA, \triangle CHF \sim$$

$$\triangle EHB, \therefore \frac{FG}{AG} = \frac{DF}{AE} = \frac{n}{m}, \frac{FH}{HB} = \frac{CF}{EB} = \frac{n}{m}, \therefore \frac{FG}{AF} =$$

$$\frac{FH}{FB} = \frac{n}{m+n}. \therefore \angle GFH = \angle AFB, \therefore \triangle GFH \sim$$

$$\triangle AFB, \therefore \frac{GH}{AB} = \frac{FG}{AF}, \therefore \frac{GH}{m} = \frac{n}{m+n}, \text{ 解得 } GH =$$

$$\frac{mn}{m+n}. \text{ 故答案为 } \frac{mn}{m+n}.$$

5. (1) 【证明】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore$ 点 E 为 AC 的中点, $\therefore AE = EC$.

$\because EF \perp BC, AB \perp BC, \therefore EF \parallel AB, \therefore CF : FB = CE : EA, \therefore CF = FB, \therefore$ 点 F 是 BC 的二等分点.

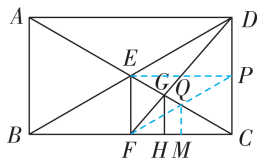
(2) 【证明】 $\because AE = EC, BF = FC, \therefore EF$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线, $\therefore EF = \frac{1}{2}AB, \therefore EF = \frac{1}{2}DC$.

$\because EF \perp BC, DC \perp BC, \therefore EF \parallel DC, \therefore \triangle EFG \sim \triangle CDG, \therefore \frac{EG}{GC} = \frac{EF}{DC} = \frac{1}{2}, \therefore \frac{GC}{CA} = \frac{1}{3}.$

$\therefore$ 易证 $GH \parallel AB, \therefore \frac{CH}{CB} = \frac{CG}{CA} = \frac{1}{3},$

$\therefore$ 点 H 是 BC 的一个三等分点.

(3) 【解】能. 如图所示, 过点 E 作 $EP \perp DC$ 于点 P , 连接 FP 交 CE 于点 Q , 过点 Q 作 $QM \perp BC$ 于点 M , 则点 M 为 BC 的一个四等分点.



关键点拨

正确地作出辅助线构造手拉手相似三角形是解题的关键.

关键点拨

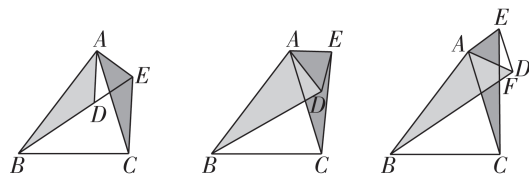
取 AD 的中点 G , 连接 FG , 证得 $\triangle BAE \sim \triangle GAF$ 是解题的关键.

刷有所得

三角形的中位线等于第三边的一半.

大招解读 | 手拉手型

$\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 共顶点 A , 通过两边成比例且夹角相等来判定三角形相似. 常见模型如下:



AD 在 $\triangle ABC$ 内且拉手线 CE 和 BD 无交点
 AD 在 $\triangle ABC$ 外且拉手线 CE 和 BD 无交点
 AD 在 $\triangle ABC$ 外且拉手线 CE 和 BD 有交点

6. B 【解析】如图, 连接 AC . $\because \frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE} = \sqrt{2},$

$$\therefore \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{AE}. \therefore \text{ 四边形 } ABCD \text{ 是矩形, } \therefore \angle B =$$

$$90^\circ. \therefore \angle AEF = 90^\circ, \therefore \angle B = \angle AEF, \therefore \triangle ABC \sim$$

$$\triangle AEF, \therefore \frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AE}, \angle BAC = \angle EAF, \therefore \frac{AC}{AB} =$$

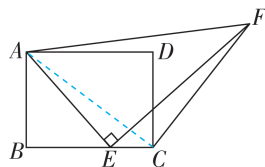
$$\frac{AF}{AE}, \angle EAF - \angle CAE = \angle BAC - \angle CAE,$$

$$\therefore \angle CAF = \angle BAE, \therefore \triangle ACF \sim \triangle ABE, \therefore \frac{CF}{BE} =$$

$$\frac{AC}{AB}. \because BC = \sqrt{2}AB, BE = 1, \therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} =$$

$$\sqrt{AB^2 + (\sqrt{2}AB)^2} = \sqrt{3}AB, \therefore \frac{CF}{BE} = \frac{\sqrt{3}AB}{AB} = \sqrt{3},$$

$$\therefore CF = \sqrt{3}BE = \sqrt{3}. \text{ 故选 B.}$$



7. B 【解析】如图, 取 AD 的中点 G , 连接 FG .

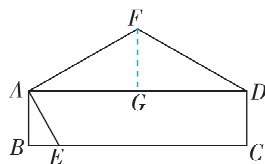
$$\because AD = 4, \therefore AG = DG = 2. \because AB = 1, \therefore \frac{AG}{AB} = 2.$$

$$\because AF = 2AE, \therefore \frac{AF}{AE} = 2, \therefore \frac{AG}{AB} = \frac{AF}{AE}, \therefore \angle BAD =$$

$$\angle EAF, \therefore \angle BAD - \angle EAD = \angle EAF - \angle EAD,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle GAF, \therefore \triangle BAE \sim \triangle GAF,$$

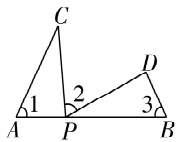
$$\therefore \angle AGF = \angle ABE = 90^\circ, \therefore \text{ 点 } F \text{ 在线段 } AD \text{ 的垂直平分线上, } \therefore DF = AF. \text{ 当点 } F \text{ 与点 } G \text{ 重合时, } DF \text{ 有最小值, 最小值为 } 2. \text{ 故选 B.}$$



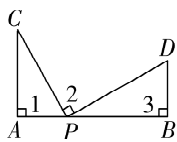
大招解读 | 一线三等角型

如图,已知 A, P, B 三点共线,且 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$.

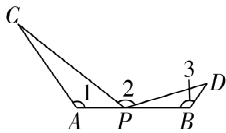
(1) 点 P 在线段 AB 上:



图(1)

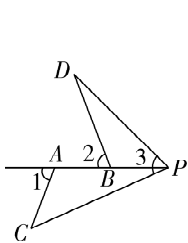


图(2)

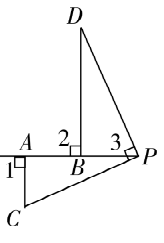


图(3)

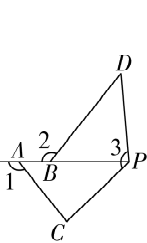
(2) 点 P 在线段 AB 的延长线上:



图(4)



图(5)



图(6)

结论: $\triangle ACP \sim \triangle BPD$.

8. (1) 【证明】 $\because \angle DPC = 90^\circ, \therefore \angle BPC + \angle APD = 90^\circ. \because \angle A = 90^\circ, \therefore \angle ADP + \angle APD = 90^\circ, \therefore \angle ADP = \angle BPC$.

又 $\because \angle A = \angle B = 90^\circ, \therefore \triangle ADP \sim \triangle BPC,$
 $\therefore AD:BP = AP:BC, \therefore AD \cdot BC = AP \cdot BP$.

【解】(2) 结论 $AD \cdot BC = AP \cdot BP$ 仍成立.

理由: $\because \angle BPD = \angle DPC + \angle BPC = \angle A + \angle ADP, \angle DPC = \angle A, \therefore \angle BPC = \angle ADP$.

又 $\because \angle A = \angle B, \therefore \triangle ADP \sim \triangle BPC, \therefore AD:BP = AP:BC, \therefore AD \cdot BC = AP \cdot BP$.

(3) $\because \triangle ADE$ 是等腰直角三角形, $\therefore \angle ADE = \angle AED = 45^\circ, AD:DE = 1:\sqrt{2}, \therefore \angle EFD = \angle B = \angle ADE = 45^\circ$, 同(2) 可证 $\triangle ABD \sim \triangle DFE,$
 $\therefore AB:DF = AD:DE = 1:\sqrt{2}. \therefore AB = 2\sqrt{2}, \therefore DF = 4. \because \angle AED = 45^\circ, \angle EFD = 45^\circ,$
 $\therefore \angle DEC = \angle EFC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

又 $\because \angle C = \angle C, \therefore \triangle DEC \sim \triangle EFC, \therefore DC:EC = EC:CF$, 即 $EC^2 = FC \cdot CD, \therefore 5 = FC(4 + FC), \therefore FC = 1, \therefore CD = 5$.

9. (1) 5 (2) $\frac{a}{4}$ 【解析】(1) $\because \triangle ABC$ 和

$\triangle BDE$ 是等边三角形, $\therefore \angle A = \angle C = \angle ABC = 60^\circ, \angle E = \angle BDE = \angle EBD = 60^\circ,$
 $\therefore \triangle ABC \sim \triangle EDB. \therefore \angle EBF = \angle DBC = 60^\circ -$

刷有所得

在任意直角三角形中过直角顶点向斜边作垂线,得到的两个小直角三角形都和原直角三角形相似.

关键点拨

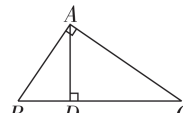
(2) 找到 AF 取最大值时, AB 与 DE 的位置关系是解题的关键.

$\angle ABD, \angle E = \angle C, \therefore \triangle BDC \sim \triangle BFE,$
 $\therefore \angle BDC = \angle BFE = \angle AFD, \therefore \triangle BDC \sim \triangle DFA, \triangle BFE \sim \triangle DFA. \therefore \angle DBF = \angle ABD,$
 $\angle BDF = \angle BAD, \therefore \triangle BDF \sim \triangle BAD$. 综上, 相似的三角形有 5 对, 故答案为 5.

(2) 由题意可得, 当 $BA \perp DE$ 时, BF 有最小值, 此时 AF 有最大值. $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle BDE$ 均为等边三角形, $\therefore BA = BC, \angle A = 60^\circ, \angle BDE = 60^\circ. \because BA \perp DE, \therefore \angle AFD = 90^\circ, \therefore \angle ADF = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ, \therefore \angle BDA = \angle ADF + \angle BDE = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ, \therefore BD \perp AC$. 又 $\because BA = BC, \therefore AD = CD = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}. \because \angle AFD = 90^\circ,$

$\angle ADF = 30^\circ, \therefore AF = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{a}{4}, \therefore AF$ 的最大值为 $\frac{a}{4}$, 故答案为 $\frac{a}{4}$.

大招解读 | 射影定理 (子母型)

基本模型	结论
 Rt$\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$	$\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$

10. (1) 【证明】 $\because CD \perp AB, \therefore \angle CDA = \angle CDB = 90^\circ. \because \angle ACB = 90^\circ, \therefore \angle ACD + \angle BCD = 90^\circ$.
 又 $\because \angle BCD + \angle B = 90^\circ, \therefore \angle ACD = \angle B, \therefore \triangle ACD \sim \triangle CBD$.

(2) 【证明】 $\because \angle ACB = \angle CDB = 90^\circ, \angle B = \angle B, \therefore \triangle ACB \sim \triangle CDB, \therefore \frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}$, 即 $BC^2 = BD \cdot AB$.

(3) 【解】 $\because \triangle ACD \sim \triangle CBD, \therefore \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}, \therefore CD^2 = AD \cdot DB. \because AD = 3, BD = 2, \therefore CD^2 = 6. \because CD > 0, \therefore CD = \sqrt{6}$.

11. (1) 【证明】 $\because AF \perp BE, AB \perp AC, \therefore \angle AFE = \angle AFB = \angle BAE = 90^\circ$.

又 $\because \angle AEF = \angle BEA, \therefore \triangle AEF \sim \triangle BEA, \therefore \frac{AE}{BE} = \frac{EF}{AE}, \therefore AE^2 = BE \cdot EF$.

【解】(2) 如图, 过点 C 作 $CH \perp BE$, 交 BE 的延长线于 H .
 $\therefore$ 点 E 是 AC 的中

