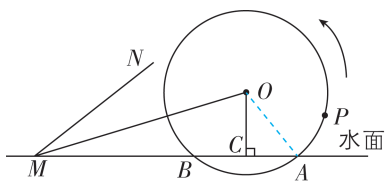


刷素养

4. 【解】(1) 如图(1), 连接 OA .



图(1)

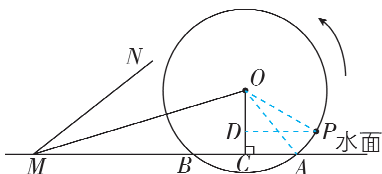
由题意, 得筒车每秒旋转 $360^\circ \times \frac{5}{6} \div 60 = 5^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle ACO$ 中, $\cos \angle AOC = \frac{OC}{OA} = \frac{2.2}{3} = \frac{11}{15}$,

$\therefore \angle AOC \approx 43^\circ$, $\therefore \frac{180-43}{5} = 27.4$ (秒).

答: 大约经过 27.4 秒, 盛水筒 P 首次到达最高点.

(2) 如图(2), 连接 OA, OP , 过点 P 作 $PD \perp OC$ 于点 D .



图(2)

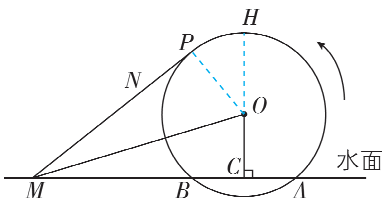
盛水筒 P 浮出水面 3.4 秒时, $\angle AOP = 3.4 \times 5^\circ = 17^\circ$, $\therefore \angle POC = \angle AOC + \angle AOP = 43^\circ + 17^\circ = 60^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle POD$ 中, $OD = OP \cdot \cos 60^\circ = 3 \times \frac{1}{2} =$

1.5 (m), $2.2 - 1.5 = 0.7$ (m).

答: 浮出水面 3.4 秒时, 盛水筒 P 距离水面的高度约为 0.7 m.

(3) 如图(3), 延长 CO 交 $\odot O$ 于点 H .



图(3)

$\because$ 点 P 在 $\odot O$ 上, 且直线 MN 与 $\odot O$ 相切,
 $\therefore$ 当点 P 在 MN 上时, 点 P 是切点. 连接 OP , 则 $OP \perp MN$.

在 $\text{Rt}\triangle OPM$ 中, $\cos \angle POM = \frac{OP}{OM} = \frac{3}{8}$,

思路分析

(1) 连接 OA , 求出 $\angle AOC$ 的度数及旋转速度即可解决问题.

(2) 连接 OP, OA , 过点 P 作 $PD \perp OC$ 于 D . 盛水筒 P 浮出水面 3.4 秒时, $\angle AOP = 3.4 \times 5^\circ = 17^\circ$. 解直角三角形, 求出 OD 即可.

(3) 延长 CO 交 $\odot O$ 于点 H , 连接 OP . 解直角三角形, 求出 $\angle POM$ 和 $\angle COM$ 的度数, 得到 $\angle POH$ 的度数, 即可求出结果.

$\therefore \angle POM \approx 68^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle COM$ 中, $\cos \angle COM = \frac{OC}{OM} = \frac{2.2}{8} = \frac{11}{40}$,

$\therefore \angle COM \approx 74^\circ$, $\therefore \angle POH = 180^\circ - \angle POM - \angle COM = 180^\circ - 68^\circ - 74^\circ = 38^\circ$, $\therefore$ 需要的时间为 $\frac{38}{5} = 7.6$ (秒).

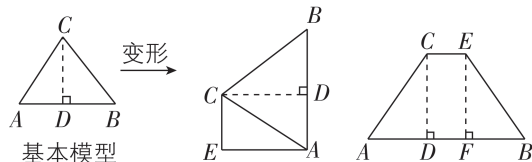
答: 盛水筒 P 从最高点开始, 至少经过约 7.6 秒恰好在直线 MN 上.

大招专题 4 锐角三角函数应用的常见模型

刷难关

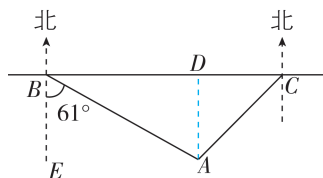
大招解读 | 背靠背型

通过在三角形内作高, 构造出两个直角三角形求解, 高为两个直角三角形的公共边. 图形模型如下:



1. 【解】该公路不会穿过纪念园.

理由: 如图, 过点 A 作 $AD \perp BC$, 垂足为点 D .



由题意得 $\angle ACD = 45^\circ$, $\angle ABE = 61^\circ$, $BC = 2.8$ km, $AD \parallel BE$, $\therefore \angle ABE = \angle DAB = 61^\circ$.

设 $AD = x$ km. 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $BD = AD \cdot \tan 61^\circ \approx 1.8x$ km.

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $CD = \frac{AD}{\tan 45^\circ} = x$ km.

$\therefore BD + CD = BC$, $\therefore 1.8x + x = 2.8$, 解得 $x = 1$, $\therefore AD = 1$ km = 1 000 m.

$\therefore 1\,000\text{ m} > 900\text{ m}$, $\therefore$ 该公路不会穿过纪念园.

2. D 【解析】由题意得, 四边形 $ABCE$ 是矩形,

$\therefore AE = BC = 6$ m. 在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中, $\angle CAE = 30^\circ$,

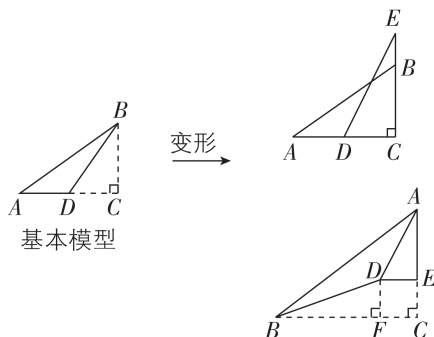
$\therefore CE = AE \cdot \tan 30^\circ = 2\sqrt{3}$ m. 在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中,

$\angle EAD = 45^\circ$, $\therefore DE = AE \cdot \tan 45^\circ = 6$ m,

$\therefore CD = CE + DE = (2\sqrt{3} + 6)$ m. 故选 D.

大招解读 | 子母型

通过在三角形外作高,构造出两个直角三角形求解,高为两个直角三角形的公共边. 图形模型如下:



3. 【解】设 $AB = x$ m.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\because \tan \angle ACB = \frac{AB}{BC}$, $\therefore \tan 52^\circ = \frac{x}{BC}$, $\therefore BC = \frac{x}{\tan 52^\circ}$.

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\because \tan \angle ADB = \frac{AB}{BD}$, $\therefore \tan 60^\circ = \frac{x}{BD}$, $\therefore BD = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

$\because CD = CB - DB$, $\therefore \frac{x}{\tan 52^\circ} - \frac{x}{\sqrt{3}} = 20$, 解得 $x \approx 98$, $\therefore AB$ 的高度约为 98 m.

4. $(10 + 40\sqrt{3})$ 米 【解析】设 BC 为 x 米, 则 $AC = (20 + x)$ 米. 由题意知 $\angle DBC = \angle AEC = 60^\circ$, $DE = 80$ 米. 在 $\text{Rt}\triangle DBC$ 中, $\tan 60^\circ = \frac{DC}{BC} = \frac{DC}{x}$, 则 $DC = \sqrt{3}x$ 米, $\therefore CE = (\sqrt{3}x - 80)$ 米. 在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中, $\tan 60^\circ = \frac{AC}{CE} = \frac{20+x}{\sqrt{3}x-80} = \sqrt{3}$,

解得 $x = 10 + 40\sqrt{3}$. 经检验, $x = 10 + 40\sqrt{3}$ 为原方程的解, 故答案为 $(10 + 40\sqrt{3})$ 米.

5. 【解】根据题意知, 四边形 AA_1B_1O 和四边形 $BB_1C_1B_2$ 均为矩形, $\therefore OB_1 = AA_1 = 62$ m, $B_2C_1 = BB_1 = 200$ m, $\therefore BO = BB_1 - OB_1 = 200 - 62 = 138$ (m), $CB_2 = CC_1 - B_2C_1 = 550 - 200 = 350$ (m).

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle BAO = 30^\circ$, $BO = 138$ m, $\therefore AB = 2BO = 2 \times 138 = 276$ (m).

在 $\text{Rt}\triangle CBB_2$ 中, $\angle CB_2B = 90^\circ$, $\angle CBB_2 = 45^\circ$, $CB_2 = 350$ m, $\therefore BC = \sqrt{2}CB_2 = 350\sqrt{2}$ m,

$\therefore AB + BC = (276 + 350\sqrt{2})$ m, 即管道 AB 和 BC 的总长度为 $(276 + 350\sqrt{2})$ m.

思路分析

(1) 由坡度得 $\frac{AB}{AE} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 再结合 $\tan \angle BEA = \frac{AB}{AE}$, 可得 $\angle BEA = 30^\circ$, $\therefore AB = \frac{1}{2}BE =$

6 m.

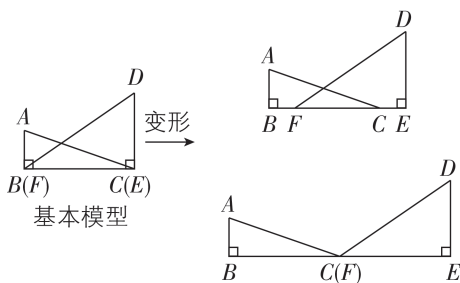
(2) 先证明四边形 $BFCA$ 是矩形, 则 $AB = CF = 6$ m, $BF = AC$, 再设 $DF = x$ m, 则 $DC = (x + 6)$ m. 解直角三角形可得 $EC = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 6)$ m, $BF = x$ m, 运用勾股定理得 $AE = \sqrt{BE^2 - AB^2} = 6\sqrt{3}$ m, 可得 $6\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 6) = x$, 则 $x = 12\sqrt{3} + 12$, 进而求解.

思路分析

先根据题意得到 BO, CB_2 的长, 在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, 由锐角三角函数可得 AB 的长度, 在 $\text{Rt}\triangle CBB_2$ 中, 由锐角三角函数可得 BC 的长度, 再相加即可得到答案.

大招解读 | 拥抱型

如图, 分别解两个直角三角形, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中, BC 为公共边. 图形模型如下:



6. 【解】(1) $\because$ 斜坡 BE 的坡度 $i = 1 : \sqrt{3}$,

$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore \tan \angle BEA = \frac{AB}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \angle BEA = 30^\circ$.

$\because BE = 12$ m, $\therefore AB = \frac{1}{2}BE = 6$ m.

答: 点 B 到水平地面的高度 AB 为 6 m.

(2) 如图, 过点 B 作 $BF \perp CD$ 于 F , 则 $\angle C = \angle A = \angle BFC = 90^\circ$, $\therefore$ 四边形 $BFCA$ 是矩形, $\therefore AB = CF = 6$ m, $BF = AC$. 设 $DF = x$ m, 则 $DC = DF + CF = (x + 6)$ m.

$\because \tan \angle DEC = \frac{DC}{EC}$, $\therefore EC = \frac{x+6}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 6)$ m.

6) m.

在 $\text{Rt}\triangle DBF$ 中, $\angle DBF = 45^\circ$, $\tan \angle DBF = \frac{DF}{BF}$,

$\therefore BF = \frac{DF}{\tan \angle DBF} = x$ m.

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $AE = \sqrt{BE^2 - AB^2} = 6\sqrt{3}$ m.

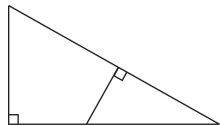
$\because BF = AC = AE + EC$, $\therefore 6\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 6) = x$,

$\therefore x = 12\sqrt{3} + 12$, $\therefore CD = DF + CF = 12\sqrt{3} + 12 + 6 = (12\sqrt{3} + 18)$ m.

答: 电线塔 CD 的高度为 $(12\sqrt{3} + 18)$ m.

大招解读 | 斜截型

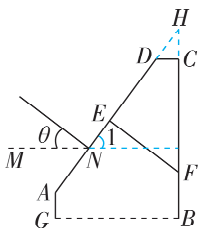
斜截型多呈现为拦截问题、安全问题. 此类型的特特点是小的直角三角形在大的直角三角形内部, 有公共的锐角, 小的直角三角形的斜边与大的直角三角形的直角边在同一直线上, 小的直角三角形的直角边与大的直角三角形的斜边在同一直线上, 如图.



7. 【解】小亮说得对.

在 $\text{Rt} \triangle ABD$ 中, $\angle ABD = 90^\circ$, $\angle BAD = 18^\circ$, $BA = 10 \text{ m}$, $\tan \angle BAD = \frac{BD}{BA}$, $\therefore BD = 10 \times \tan 18^\circ \approx 3.25 \text{ (m)}$, $\therefore CD = BD - BC = 3.25 - 0.5 = 2.75 \text{ (m)}$.
 $\because \angle CDE + \angle BAD = 90^\circ$, $\therefore \angle CDE = 90^\circ - \angle BAD = 72^\circ$.
 $\because CE \perp AD$, $\therefore \sin \angle CDE = \frac{CE}{CD}$, $\therefore CE = CD \times \sin \angle CDE = 2.75 \times \sin 72^\circ \approx 2.6 \text{ (m)}$, $\therefore$ 正确的限制高度约为 2.6 m .

8. 【解】如图, 延长 ED 交 BC 的延长线于点 H , 延长 MN .



$\because \theta = 37^\circ$, $\therefore \angle 1 = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$, $\therefore \angle H = 90^\circ - \angle 1 = 37^\circ$.

在 $\text{Rt} \triangle CDH$ 中, $HC = \frac{CD}{\tan 37^\circ}$, $\therefore HF = HC + CF = \frac{CD}{\tan 37^\circ} + CF$,

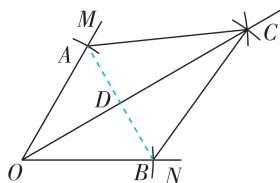
$\therefore$ 在 $\text{Rt} \triangle EFH$ 中, $EF = \left(\frac{CD}{\tan 37^\circ} + CF \right) \cdot \sin 37^\circ \approx \left(\frac{20}{\frac{3}{4}} + 100 \right) \times \frac{3}{5} = 76 \text{ (cm)}$.

答: EF 的长约为 76 cm .

全章综合训练

刷中考

1. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 【解析】如图, 连接 AB , 交 OC 于点 D . 由题意得 $OA = OB = 2$, $AC = BC = \sqrt{6}$, $\therefore OC$



垂直平分 AB , $\therefore OC \perp AB$, $BD = \frac{1}{2} AB$.
 $\because \angle MON = 60^\circ$, $\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形,
 $\therefore AB = OA = 2$, $\therefore BD = 1$, $\therefore CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{5}$, $\therefore$ 在 $\text{Rt} \triangle BCD$ 中, $\tan \angle BCO = \frac{BD}{CD} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

关键点拨

过点 F 作 $FG \perp AC$ 于点 G , 证明四边形 $AEFG$ 是矩形, 得到 $AE = FG$, $AG = EF = b$, 则 $CG = a - b$, 根据 $\tan \alpha = \frac{GF}{CG}$ 得到 $FG = CG \tan \alpha = (a - b) \tan \alpha$, 即可求出 AE .

关键点拨

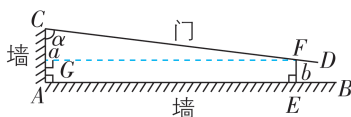
延长 ED 交 BC 的延长线于点 H , 延长 MN , 则 $\angle H = 37^\circ$, 然后在 $\text{Rt} \triangle CDH$ 和 $\text{Rt} \triangle EFH$ 中, 利用锐角三角函数即可求出答案.

思路分析

由作图易知 OC 垂直平分 AB , 再证明 $\triangle AOB$ 是等边三角形, 从而得到 BD 的长, 再利用勾股定理求得 CD 的长, 即可利用三角函数求出结果.

$\frac{\sqrt{5}}{5}$, 故答案为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

2. D 【解析】如图, 过点 F 作 $FG \perp AC$ 于点 G . $\because AC \perp AB$, $EF \perp AB$, $FG \perp AC$, $\therefore$ 四边形 $AEFG$ 是矩形, $\therefore AE = FG$, $AG = EF = b$. $\because AC = a$, $\therefore CG = AC - AG = a - b$. 在 $\text{Rt} \triangle CGF$ 中, $\angle GCF = \angle ACF = \alpha$, $\therefore \tan \alpha = \frac{GF}{CG}$, $\therefore FG = CG \tan \alpha = (a - b) \tan \alpha$, $\therefore AE = FG = (a - b) \tan \alpha$.



3. 【解】(1) 依题意得, $OB \perp BD$, $\angle CBD = 30^\circ$, $\therefore \angle ABO = 90^\circ - \angle CBD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.
 $\because OA \perp AB$, $\therefore \angle AOB = 90^\circ - \angle ABO = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. $\therefore AB = 1.5 \text{ m}$, $\therefore OB = 3 \text{ m}$, 故答案为 3 .

(2) 由题意得 $OC \perp CF$, $OB \perp BC$, $OA \perp AD$, $OD \perp DH$, $\therefore \angle ECF + \angle OCB = 90^\circ$, $\angle COB + \angle OCB = 90^\circ$, $\therefore \angle COB = \angle ECF = 20.6^\circ$.

在 $\text{Rt} \triangle OCB$ 中, $\tan \angle COB = \frac{CB}{OB}$, $\therefore \tan 20.6^\circ = \frac{3}{OB}$, $\therefore \frac{3}{8} \approx \frac{3}{OB}$, $\therefore OB = 8 \text{ m}$, $\therefore OA = OB - AB = 8 - 2 = 6 \text{ (m)}$.

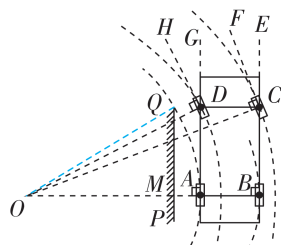
在 $\text{Rt} \triangle OAD$ 中, $\tan \angle AOD = \frac{AD}{OA}$, $\therefore \tan \angle AOD = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\therefore \angle AOD \approx 26.6^\circ$.

$\because \angle AOD + \angle ADO = 90^\circ$, $\angle GDH + \angle ADO = 90^\circ$, $\therefore \angle GDH = \angle AOD \approx 26.6^\circ$.

答: 此时左前轮的转向角 $\angle GDH$ 的度数约为 26.6° .

(3) $\frac{3}{8} < \sin \theta < \frac{3\sqrt{58}}{58}$.

如图(1), 连接 OQ , 设 OA, PQ 交于点 M . 当 θ 最大时, 转弯行驶时 A 点经过 Q 点.



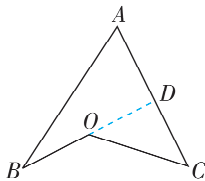
图(1)

由题意得, $MQ = AD = 3 \text{ m}$, $AM = 1 \text{ m}$, $\angle ECF =$

勾股定理得 $BN^2 + DN^2 = BD^2$, 即 $x^2 + (3x)^2 = (4\sqrt{2})^2$, 解得 $x = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ (负值已舍去), $\therefore BN = AM = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, $DN = BM = \frac{12\sqrt{5}}{5}$, $\therefore MN = BN + MB = \frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{12\sqrt{5}}{5} = \frac{16\sqrt{5}}{5}$. $\therefore$ 点 $D(4\sqrt{5}, 0)$, $\therefore OD = 4\sqrt{5}$, $\therefore ON = 4\sqrt{5} - \frac{12\sqrt{5}}{5} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$, $\therefore$ 点 $A(\frac{12\sqrt{5}}{5}, \frac{16\sqrt{5}}{5})$. $\therefore$ 点 $D(4\sqrt{5}, 0)$, $\therefore AD$ 中点 O' 的坐标为 $(\frac{16\sqrt{5}}{5}, \frac{8\sqrt{5}}{5})$. 故选 D.

6. 135° 【解析】 $\because \angle A, \angle B, \angle C$ 都是锐角,

$\sin A = \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan C = 1$, $\therefore \angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 45^\circ$. 如图, 延长 BO 交 AC 于点 D , $\therefore \angle CDO = \angle A + \angle B = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, $\therefore \angle BOC = \angle CDO + \angle C = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$. 故答案为 135° .

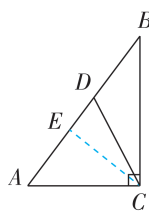


7. 30° 【解析】将原等式移项, 得 $\sin^2 A - \frac{3}{2}\sin A + \frac{1}{2} = 0$, 方程两边同乘 2, 得 $2\sin^2 A - 3\sin A + 1 = 0$, 因式分解, 得 $(2\sin A - 1)(\sin A - 1) = 0$, 解得 $\sin A = \frac{1}{2}$ 或 $\sin A = 1$. 因为 $\angle A$ 为锐角, 所以 $0^\circ < \angle A < 90^\circ$. 当 $\sin A = 1$ 时, $\angle A = 90^\circ$, 不符合锐角定义, 舍去. 当 $\sin A = \frac{1}{2}$ 时, $\angle A = 30^\circ$.

8. 2 或 $\frac{1}{2}$ 【解析】在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$.

$\therefore \tan \angle CAB = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$, $\therefore$ 设 $BC = 4k$, 则 $AC = 3k$. $\because AC^2 + BC^2 = AB^2$, $\therefore (3k)^2 + (4k)^2 = 5^2$, 解得 $k = 1$ (负值已舍去), $\therefore AC = 3, BC = 4$, $\therefore AD = AC = 3$. 点 D 为直线 AB 上一点时, 点 D 的位置分两种情况:

①如图(1), 当点 D 在线段 AB 上时, 过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E .



图(1)

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CE = \frac{1}{2}AC \cdot BC$, $\therefore CE = \frac{12}{5}$,

思路分析

先解方程得到 $\sin A = \frac{1}{2}$ 或 1, 再根据 $\angle A$ 为锐角求出 $\angle A$ 的度数为 30° .

易错警示

题中给出的点 D 为直线 AB 上一点, 点 D 有可能在线段 AB 上, 也有可能在线段 BA 的延长线上, 注意分情况讨论.

$\therefore AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{3^2 - (\frac{12}{5})^2} = \frac{9}{5}$,

$\therefore DE = AD - AE = 3 - \frac{9}{5} = \frac{6}{5}$, $\therefore \tan \angle CDA = \frac{CE}{DE} =$

$\frac{12}{\frac{6}{5}} = 2$. ②如图(2), 当点 D

在线段 BA 的延长线上时, 过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E .

$\because AD = 3$, 由①得 $CE = \frac{12}{5}$,

图(2)

$AE = \frac{9}{5}$, $\therefore DE = AD + AE = 3 + \frac{9}{5} = \frac{24}{5}$,

$\therefore \tan \angle CDA = \frac{CE}{DE} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{24}{5}} = \frac{1}{2}$. 综上所述,

$\tan \angle CDA$ 的值是 2 或 $\frac{1}{2}$.

9. 16 【解析】由题意可知 $AB = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$, $\tan \angle BAO = \frac{BO}{AO} = \frac{1}{3}$. 设直线 AB 的表达式为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$), 则 $\begin{cases} 6k + b = 0, \\ b = 2, \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} k = -\frac{1}{3}, \\ b = 2, \end{cases}$ $\therefore$ 直线 AB 的表达式为 $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

$\therefore$ 以 AB 为斜边, 在其右上方作 $Rt\triangle ABC$, $\therefore \angle C = 90^\circ$, $\therefore$ 点 C 在以 AB 为直径且在 AB 上方的半圆上运动, 设 AB 中点为 D , 如图.

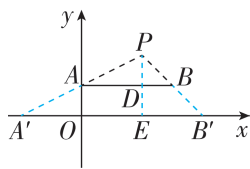
$\therefore C(x, y)$, $x > 0, y > 0$, 设 $x + 3y = t$, $\therefore t > 0, y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}t$, 则当 $x + 3y$ 取得最大值时, t 取得最大值. 设直线 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}t$ 与 y 轴的交点坐标为 $M(0, \frac{1}{3}t)$, 与 x 轴的交点坐标为 $E(t, 0)$,

$\therefore \tan \angle MEO = \frac{MO}{EO} = \frac{\frac{1}{3}t}{t} = \frac{1}{3} = \tan \angle BAO$,

$\therefore \angle MEO = \angle BAO$, $\therefore ME \parallel AB$. 当直线 ME 与半圆相切时, 令切点为 C , 连接 DC , 则 $DC \perp ME$, 且点 M 的纵坐标最大, 即此时 t 取得最大值. 过点 B 作 $BN \perp ME$, 则 $\angle MNB = \angle NBA = \angle BOA = 90^\circ$, $\therefore \angle MBN + \angle ABO = \angle OAB + \angle ABO = 90^\circ$, $\therefore \angle MBN = \angle OAB$.

离有关,所以无法判断谁的影子长. 故选 D.

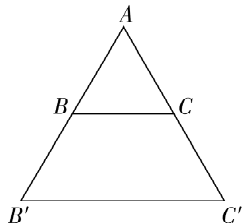
7. **C** 【解析】延长 PA , PB 分别交 x 轴于 A' , B' , 作 $PE \perp x$ 轴于 E , 交 AB 于 D , 如图.



$\because P(2,2), A(0,1), B(3,1), \therefore AB \parallel x$ 轴, $PD=1, PE=2, AB=3. \therefore AB \parallel A'B', \therefore \triangle PAB \sim \triangle PA'B', \therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{PD}{PE}$, 即 $\frac{3}{A'B'} = \frac{1}{2}, \therefore A'B' =$

6. 故选 C.

8. **不变** 【解析】如图, 设路灯 A 高度为 H , 竹竿 BC 高度为 h , 竹竿 BC 长度为 $L, B'C'$ 为 BC 在地面上的影子. $\because$ 路灯

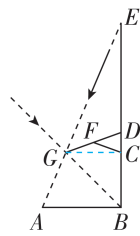


A 的位置不变, 竹竿与地面始终保持平行且与地面之间的距离不变, $\therefore \triangle ABC$ 的高为 $H-h$, $\triangle AB'C'$ 的高为 $H, BC \parallel B'C', \therefore \triangle ABC \sim \triangle AB'C', \therefore \frac{B'C'}{BC} = \frac{H}{H-h}, \therefore B'C' = \frac{HL}{H-h}$, $\therefore$ 竹竿在地面上的投影长度与竹竿相对于路灯的水平距离无关. 因此, 当小明移动竹竿时, 投影长度不变. 故答案为不变.

刷提升

1. **16** 【解析】如图, 连接 CG .

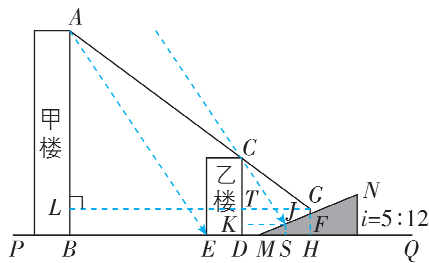
$\because BE \perp AB, \angle ABG = 45^\circ,$
 $\therefore \angle EBG = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$
 $\because FD = FC = FG, \therefore \angle GCD = 90^\circ,$
 $\therefore \angle CGB = \angle CBG = 45^\circ, \therefore CG =$



$CB = \sqrt{DG^2 - CD^2} = \sqrt{(\sqrt{17})^2 - 1^2} = 4, \therefore AB = BD = BC + CD = 4 + 1 = 5. \therefore \angle ECG = \angle ABE = 90^\circ, \therefore CG \parallel AB, \therefore \triangle EGC \sim \triangle EAB, \therefore \frac{EC}{EB} =$

$\frac{CG}{AB}, \therefore \frac{EC}{EC+4} = \frac{4}{5}, \therefore EC = 16.$ 故答案为 16.

2. 【解】(1) 如图, 过 G 点作 $GL \perp AB$ 于点 L, GL 交 CD 于点 T , 延长 GF 交 MQ 于点 H .



思路分析

延长 PA, PB 分别交 x 轴于 A', B' , 作 $PE \perp x$ 轴于 E , 交 AB 于 D , 证明 $\triangle PAB \sim \triangle PA'B'$, 然后利用相似三角形的性质可求出 $A'B'$ 的长.

方法总结

解决此类解直角三角形与相似、投影综合题时, 先利用坡度设未知数表示斜坡上的水平长度与竖直高度, 再作辅助线构造相似三角形, 借助平行投影得到比例关系列方程求解.

$\therefore$ 斜坡 MN 的坡度 $i = 5:12, \therefore FH:MH = 5:12.$

设 $FH = 5x$ m, $MH = 12x$ m, $\therefore MF = \sqrt{FH^2 + MH^2} = 13x, \therefore 13x = 19.5$, 解得 $x = 1.5,$
 $\therefore FH = 7.5$ m, $MH = 18$ m,

$\therefore DH = DM + MH = 6 + 18 = 24$ (m), $GH = GF + FH = 1.5 + 7.5 = 9$ (m), $\therefore BH = BE + DE + DH = 48 + 12 + 24 = 84$ (m), 易得 $BL = DT = GH = 9$ m, $GT = DH = 24$ m, $\therefore CT = CD - DT = 27 - 9 = 18$ (m). 易得 $GL = BH = 84$ m. $\therefore CT \parallel AL,$

$\therefore \triangle GCT \sim \triangle GAL, \therefore \frac{CT}{AL} = \frac{GT}{GL},$ 即 $\frac{18}{AL} = \frac{24}{84},$

$\therefore AL = 63$ m, $\therefore AB = AL + BL = 63 + 9 = 72$ (m).

答: 甲楼高度 AB 为 72 m.

(2) 设太阳光线照射乙楼顶端 C 的影子恰好落在斜坡 MN 上的 J 点处, 过 J 点作 $JS \perp DQ$ 于 S 点, $JK \perp CD$ 于 K 点, 如图. $\because$ 斜坡 MN 的坡度为 $i = 5:12, \therefore JS:MS = 5:12.$

设 $JS = 5t$ m, $MS = 12t$ m, $\therefore MJ = \sqrt{JS^2 + MS^2} = 13t$ m, 易得 $JK = DS = DM + MS = (6 + 12t)$ m, $DK = JS = 5t$ m, $\therefore CK = CD - DK = (27 - 5t)$ m.

$\therefore \frac{CK}{JK} = \frac{AB}{BE}, \therefore \frac{27-5t}{6+12t} = \frac{72}{48},$ 解得 $t = \frac{18}{23},$

$\therefore MJ = 13t = 13 \times \frac{18}{23} = \frac{234}{23}$ (m).

答: 此时乙楼的影子落在斜坡 MN 上的长度为

$\frac{234}{23}$ m.

刷素养

3. 【解】(1) $\because \angle CEF = \angle AEF, AB \perp BD, FE \perp BD, CD \perp BD, \therefore \angle AEB = \angle CED = 90^\circ - \angle AEF, \angle B = \angle D = 90^\circ, \therefore \triangle ABE \sim \triangle CDE,$
 $\therefore \frac{AB}{BE} = \frac{CD}{DE}.$

$\therefore CD = 1.7$ m, $BE = 20$ m, $DE = 2$ m, $\therefore \frac{AB}{20} =$

$\frac{1.7}{2}, \therefore AB = 17$ m.

(2) $\because GB \perp BD, CD \perp BD, \therefore \angle B = \angle D = 90^\circ.$

$\therefore$ 易知 $\angle GE_1B = \angle CE_1D, \therefore \triangle GE_1B \sim \triangle CE_1D, \therefore \frac{GB}{BE_1} = \frac{CD}{DE_1}.$

$\therefore DE_1 = 2$ m, $BD = 10$ m, $\therefore BE_1 = BD - DE_1 = 10 - 2 = 8$ (m).

$\because CD = 1.7 \text{ m}, \therefore \frac{GB}{8} = \frac{1.7}{2}, \therefore GB = 6.8 \text{ m}.$
 $\because \angle B = \angle D = 90^\circ$, 易知 $\angle AE_2B = \angle CE_2D$,
 $\therefore \triangle ABE_2 \sim \triangle CDE_2, \therefore \frac{AB}{BE_2} = \frac{CD}{DE_2}.$
 $\because DE_2 = 3.4 \text{ m}, BD = 10 \text{ m}, \therefore BE_2 = BD - DE_2 = 10 - 3.4 = 6.6 (\text{m}).$
 $\because CD = 1.7 \text{ m}, \therefore \frac{AB}{6.6} = \frac{1.7}{3.4}, \therefore AB = 3.3 \text{ m},$
 $\therefore AG = GB - AB = 6.8 - 3.3 = 3.5 (\text{m}).$

课时2 正投影

刷基础

1. B 【解析】A 选项, 物体在太阳光下产生的投影不一定是物体的正投影, 原说法错误, 不合题意; B 选项, 正投影一定是平行投影, 原说法正确, 符合题意; C 选项, 物体在灯光下产生的投影不是物体的正投影, 原说法错误, 不合题意; D 选项, 正投影是平行投影, 原说法错误, 不合题意. 故选 B.

2. A 【解析】根据题意可得, 当光线由上向下垂直照射时, 该几何体在水平投影面上的正投影由 4 个小正方形组成. 故选 A.

3. D 【解析】当正方形纸板所在平面与光线平行时, 得到的正投影是一条线段; 当正方形纸板所在平面与光线垂直时, 得到的正投影是一个与原正方形全等的正方形; 当正方形纸板所在平面与光线不垂直也不平行时, 得到的正投影可能是一个邻边不等的矩形; 正方形纸板的正投影不可能是等腰梯形. 故选 D.

4. $S = S_1 < S_2$ 【解析】 $\because$ 立体图形是长方体, $\therefore$ 底面 $ABCD \parallel$ 底面 $EFGH. \therefore$ 矩形 $EFGH$ 的投影是矩形 $ABCD, \therefore S = S_1. \because EM > EF, EH = EH, \therefore S_1 < S_2, \therefore S = S_1 < S_2.$

5. D 【解析】正投影的长度与木棒的摆放角度有 关系, 但无论怎样摆放都不会超过 $1.2 \text{ m}.$ 故选 D.

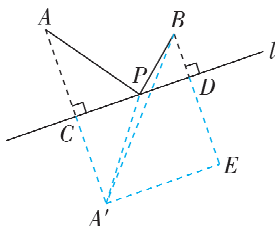
6. C 【解析】在 $\text{Rt} \triangle BCD$ 中, $\angle B = 30^\circ, BC = 8 \text{ m}, \therefore BD = BC \cdot \cos 30^\circ = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} (\text{m}).$
 $\therefore AB = 1.5 \text{ m}, \therefore$ 它在水平面所形成的正投影的面积为 $1.5 \times 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3} (\text{m}^2).$ 故选 C.

7. 60° 【解析】过 A 作 $AC \perp BB'$ 于 C 点. $\because AB$ 在平面 α 内的正投影为 $A'B', \therefore \angle AA'B' = \angle BB'A' = 90^\circ = \angle ACB', \therefore$ 四边形 $ACB'A'$ 是矩形,

关键点拨

熟练掌握“将军饮马”模型是解题的关键.

8. $\sqrt{61}$ 【解析】 $\because$ 点 A 到直线 l 的距离是 4, 点 B 到直线 l 的距离是 2, A, B 在直线 l 上的正投影间距为 5, $\therefore AC = 4, BD = 2, AC \perp l, BD \perp l,$



$CD = 5.$ 如图, 作 A 关于 l 的对称点 A' , 连接 $A'P, A'B, AA',$ 过 A' 作 $A'E \perp BD$ 交 BD 的延长线于 E, 则 AA' 过点 C, $AC = A'C = 4$, 四边形 $A'CDE$ 是矩形, $AP = A'P, \therefore A'E = CD = 5, A'C = DE = 4, \therefore BE = 6, \therefore A'B = \sqrt{A'E^2 + BE^2} = \sqrt{61}. \because AP = A'P, \therefore PA + PB = A'P + PB \geq A'B, \therefore$ 当 A', P, B 三点共线时, $PA + PB$ 取得最小值, 最小值为 $A'B = \sqrt{61},$ 故答案为 $\sqrt{61}.$

刷易错

易错警示

根据正投影的性质知圆柱底面圆的直径为 3 或 4, 注意分情况讨论.

9. 【解】①当圆柱底面圆的半径为 $\frac{3}{2}$, 高为 4 时, 圆柱的表面积为 $2\pi \times \frac{3}{2} \times 4 + 2\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 12\pi + \frac{9}{2}\pi = \frac{33}{2}\pi;$

$\frac{33}{2}\pi;$

$\frac{33}{2}\pi;$

②当圆柱底面圆的半径为 2, 高为 3 时, 圆柱的表面积为 $2\pi \times 2 \times 3 + 2\pi \times 2^2 = 12\pi + 8\pi = 20\pi.$

综上, 这个圆柱的表面积为 $\frac{33}{2}\pi$ 或 $20\pi.$

9.2 三视图

课时1 几何体的三视图

刷基础

1. B 【解析】从左面看是一个等腰三角形. 故选 B.

2. ②⑤

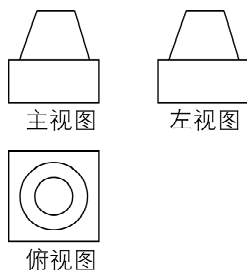
3. A 【解析】题图中圆桌的俯视图为 故

选 A.

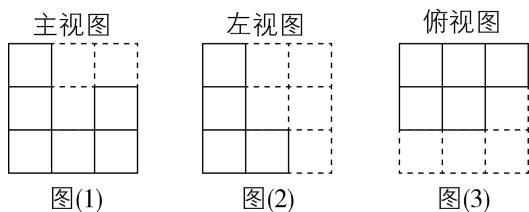
4. D 【解析】从上面看 U 形磁铁是一个矩形, 且中间有 2 条竖着的实线, 故选 D.

5. B 【解析】拿走乙后, 该几何体主视图的形状会改变, 主视图中第二列小正方形的个数由原来的两个变成一个.

6. 【解】如图所示.



7. 【解】如图(1)(2)(3),三视图即为所求.



课时2 由三视图判断几何体

刷基础

1. **A** 【解析】由该几何体的俯视图可得该几何体的上下底面是大小不同的两个圆,只有 A 选项符合,且 A 选项中几何体的主视图、左视图均与题图相匹配. 故选 A.

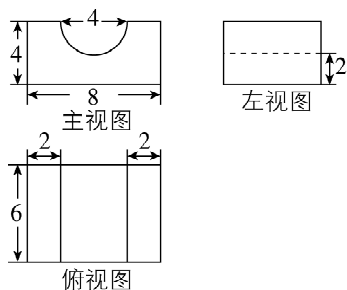
2. **C** 【解析】从主视图来看,从左向右,第一列可看到三个面,第二列可看到两个面,第三列可看到一个面;从左视图来看,第一列有三个面,第二列有一个面,则只有 C 选项符合题意. 故选 C.

3. **C** 【解析】由题图可得挖去的几何体为四棱锥. 故选 C.

4. **A** 【解析】由三视图可得,该工件的体积为 $(2 \div 2)^2 \times \pi \times 1 + (4 \div 2)^2 \times \pi \times 4 = \pi + 16\pi = 17\pi (\text{cm}^3)$. 故选 A.

5. $(36+8\sqrt{3}) \text{cm}^2$ 【解析】由题图可得这个几何体是直三棱柱,这个几何体的侧面积为 $4 \times 3 \times 3 = 36 (\text{cm}^2)$,两个底面的面积之和为 $2 \times \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{4^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2} = 8\sqrt{3} (\text{cm}^2)$, $\therefore$ 这个几何体的表面积是 $(36+8\sqrt{3}) \text{cm}^2$. 故答案为 $(36+8\sqrt{3}) \text{cm}^2$.

6. 【解】补全三视图如图所示.



刷有所得

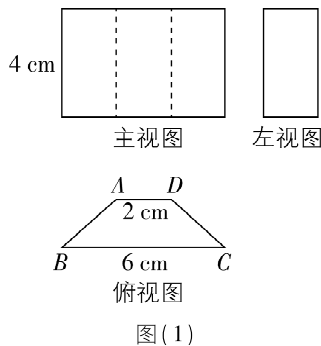
由三视图还原几何体的方法:(1)通过俯视图得到几何体底面的基本形状;

(2)由主视图和左视图得出几何体,并对比三视图来判断所得几何体是否正确;

(3)应注意三视图中虚线、实线及其位置.

由三视图可知,该几何体是一个长、宽、高分别为 8,6,4 的长方体在上底面中间挖去一个底面直径为 4,高为 6 的圆柱的一半,则该几何体的体积为 $8 \times 6 \times 4 - \frac{1}{2} \pi \times (4 \div 2)^2 \times 6 = 192 - 12\pi$.

7. 【解】(1)主视图补充完整如图(1)所示:



(2) $\because$ 俯视图为等腰梯形 $ABCD$, $\therefore AB = CD$. $\therefore$ 该四棱柱的侧面积为 $(32 + 16\sqrt{2}) \text{cm}^2$, $\therefore 4AB + 2 \times 4 + 4CD + 6 \times 4 = 32 + 16\sqrt{2}$, $\therefore AB = CD = 2\sqrt{2} \text{cm}$,故答案为 $2\sqrt{2}$.

(3) 如图(2),作 $AE \perp BC$ 于 E , $DF \perp BC$ 于 F . $\because$ 俯视图为等腰梯形 $ABCD$, $\therefore AB = CD$, $AD \parallel BC$.

$\because AE \perp BC$, $DF \perp BC$, $\therefore \angle AEF = \angle DFE = \angle AEB = \angle DFC = 90^\circ$.

$\because AD \parallel BC$, $\therefore \angle EAD = 90^\circ$, $\therefore$ 四边形 $ADFE$ 是矩形, $\therefore EF = AD = 2 \text{cm}$, $AE = DF$,

$\therefore \text{Rt} \triangle ABE \cong \text{Rt} \triangle DCF (\text{HL})$, $\therefore BE = CF$. $\therefore BE + EF + CF = BC = 6 \text{cm}$, $\therefore BE = CF = \frac{6-2}{2} = 2 (\text{cm})$, $\therefore AE = DF = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2 (\text{cm})$, $\therefore$ 左视图中矩形的面积为 $2 \times 4 = 8 (\text{cm}^2)$,故答案为 8.

(4) 由题意得这个四棱柱的体积为 $\frac{1}{2} \times (2 + 6) \times 2 \times 4 = 32 (\text{cm}^3)$,故答案为 32.

关键点拨

从左视图中 2 开始,结合题意依次推导出几何体中右下角小正方体的正面是 6,后面是 1,左面是 4,右面是 3,故上、下两面就是 2,5. 当底面是 5,上面是 2 时,与 2 接触的是 6,其对面是 1,接触的两个面上的数

刷提升

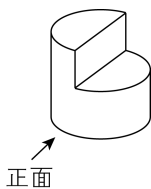
1. **B** 【解析】由题意可以还原这个立体图形的形状. 由左视图中的数字可知,2 的对面是 5,与 5 接触的是 3,其对面是 4,与 4 接触的是 4,其对面是 3;几何体中右下角小正方体的正面是 6,后面是 1,左面是 4,右面是 3,故上、下两面就是 2,5. 当底面是 5,上面是 2 时,与 2 接触的是 6,其对面是 1,接触的两个面上的数

字之和为 8, 则与 1 接触的是 7, 不可能, 故底面只能是 2, 上面是 5, 与 5 接触的是 3, 其对面是 4, 与 4 接触的还是 4, ★为其对面, 所以 ★是 3. 故选 B.

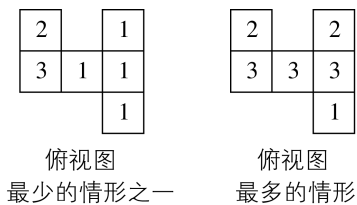
2. **C** 【解析】过点 A 作 $AD \perp BC$ 于 D, 易得 $BD=4, CD=m, AD=n$. $\because BC=7, BC=BD+CD=4+m, \therefore m=3$, 故选项 A 结论正确, 不符合题意. $\because \tan B = \frac{AD}{BD} = \frac{1}{2}, BD=4, \therefore AD=2$, 即 $n=2$, 故选项 B 结论正确, 不符合题意. 在 $Rt\triangle ADC$ 中, $\tan C = \frac{AD}{CD} = \frac{2}{3}$, 故选项 C 结论不正确, 符合题意. $\because BC=7, AD=2, \therefore S_{\triangle ABC} = 7 \times 2 \div 2 = 7$, 故选项 D 结论正确, 不符合题意.

3. 【解】由这个几何体的三视图可知该几何体如图所示.

因为底面直径为 8 mm, 所以半径为 4 mm, 所以上、下底面的面积为 $\pi \times 4^2 \times 2 = 32\pi (\text{mm}^2)$, 左半面的面积为 $4\pi \times 10 = 40\pi (\text{mm}^2)$, 右半面的面积为 $4\pi \times 5 + 5 \times 8 = (20\pi + 40) \text{mm}^2$, 所以这个几何体的表面积为 $(92\pi + 40) \text{mm}^2$. 这个几何体的体积为 $\pi \times 4^2 \times 10 - \frac{1}{2} \times \pi \times 4^2 \times 5 = 160\pi - 40\pi = 120\pi (\text{mm}^3)$.



4. 【解】(1) 如图(1), 可知该几何体最少由 $2+1+3+1+1+1=9$ (个) 小正方体搭成, 最多由 $2+2+3+3+3+1=14$ (个) 小正方体搭成. 故答案为 9, 14.

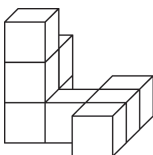


图(1)

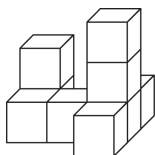
- (2) ①该几何体体积的最大值为 $3^3 \times 14 = 378 (\text{cm}^3)$.

②所涂油漆的面积有两种情形:

如图(2), 涂油漆的面有 $2 \times (5+6+6+1) = 36$ (个), 所涂油漆的面积为 $36 \times 3^2 = 324 (\text{cm}^2)$.



图(2)



图(3)

如图(3), 涂油漆的面有 $2 \times (6+6+6+1) =$

38 (个), 所涂油漆的面积为 $38 \times 3^2 = 342 (\text{cm}^2)$.

刷素养

5. 【解】(1) 由题意, 得 x 个碟子的高度为 $2+1.5(x-1) = (1.5x+0.5) \text{cm}$.
(2) 由三视图可知共有 12 个碟子, $\therefore$ 叠成一摞后的高度为 $1.5 \times 12 + 0.5 = 18.5 (\text{cm})$.

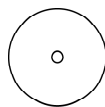
全章综合训练

刷中考

1. **D** 【解析】这个几何体的主视图为 .

故选 D.

2. **B** 【解析】它的俯视图如下:



故选 B.

3. **B** 【解析】移走①或③或④, 得到的几何体的左视图与原来的几何体的左视图相同, 均为底层是两个小正方形, 上层的左边有一个小正方形; 移走②, 得到的几何体的左视图为一列两个小正方形, 所以若移走一块小正方体, 几何体的左视图发生了改变, 则移走的小正方体是②. 故选 B.

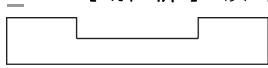
4. **D** 【解析】该几何体上部是圆锥, 中部是半球, 下部是两个圆柱. $\therefore$ 圆锥的主视图是三角形, 半球的主视图是半圆, 圆柱的主视图是矩形, $\therefore$ 这个几何体的主视图中出现的图形有三角形、半圆、矩形, 没有菱形.

5. **B** 【解析】根据主视图和左视图为矩形可判断出这个几何体是柱体, 再根据俯视图是三角形可判断出这个几何体是三棱柱. 故选 B.

6. **A** 【解析】由主视图和俯视图可知从左侧看到的图形下面是一个长方形, 上面中间是一个小正方形, 故选 A.

7. **B** 【解析】根据主视图、左视图可知, 最后一个小正方体应放在②号位置. 故选 B.

刷章测

1. **B** 【解析】该构件的主视图是 , 故选 B.

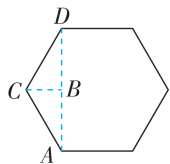
2. **B** 【解析】设表高为 $x \text{ m}$. 由题意得, $2x - \frac{1}{3}x = 4$, 解得 $x = 2.4$, $\therefore$ 表高为 2.4 m. 故选 B.

3. **C** 【解析】礼盒的俯视图如图, 连接 AD, 作

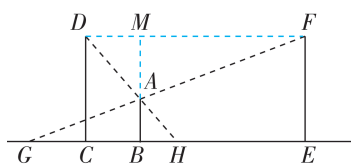
思路分析
过点 A 作 $AD \perp BC$ 于 D. 根据这个三棱柱的三视图, 得出 $BD=4, CD=m, AD=n$, 根据锐角三角函数的定义、线段的和差和三角形的面积分别对各个结论进行判断即可.

思路分析
由主视图可知, 两顶点之间的距离为 40 cm, 利用正六边形的性质求得底面对边之间的距离, 即可求解.

$CB \perp AD$ 于点 B , 则 $CD = AC = 40 \div 2 = 20$ (cm),
 $\angle ACD = 120^\circ$, $\therefore \angle ACB = 60^\circ$, $\therefore AB = AC \cdot \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$ (cm), $\therefore AD = 2AB = 20\sqrt{3}$ (cm),
 故所需胶带的长度至少为 $20\sqrt{3} \times 6 + 15 \times 6 \approx 298$ (cm). 故选 C.



(第3题图)



(第4题图)

关键点拨

解此题的关键是利用相似三角形的性质求出 $\frac{GH}{AM} = \frac{AB \cdot FD}{AM}$.

思路分析

(2) 在 y 轴上的“影长范围”内的最大值为 10, 即函数在 $-4 \leq x \leq 2$ 上的最大值为 10, 分三种情况讨论:
 ① $-4 \leq \frac{t}{2} \leq 2$; ② $\frac{t}{2} > 2$; ③ $\frac{t}{2} < -4$. 根据函数的增减性即可求得 t 的值.

关键点拨

解答此题要将木块侧面展开, 根据两点之间线段最短进行计算.

32 cm 的圆柱, 所以该几何体的侧面积为 $30 \times 40 \times 2 + 25 \times 40 \times 2 + 20\pi \times 32 = (4400 + 640\pi)$ cm^2 , 体积为 $30 \times 25 \times 40 + \pi \times \left(\frac{20}{2}\right)^2 \times 32 = (30000 + 3200\pi)$ cm^3 .

11. 【解】(1) 当 $y = 1$ 时, $x = -3$, 当 $y = 3$ 时, $x = -1$, $\therefore$ 在 x 轴上的“影长范围”为 $-3 \leq x \leq -1$, “影长”为 2.

(2) $\because y = -x^2 + tx + 2t = -\left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2}{4} + 2t$, $\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{t}{2}$.

① 当 $-4 \leq \frac{t}{2} \leq 2$, 即 $-8 \leq t \leq 4$ 时, $\therefore$ 在 y 轴上的“影长范围”内的最大值为 10, $\therefore \frac{t^2}{4} + 2t = 10$, 解得 $t = -4 + 2\sqrt{14}$ 或 $t = -4 - 2\sqrt{14}$ (舍), $\therefore t = -4 + 2\sqrt{14}$;

② 当 $\frac{t}{2} > 2$, 即 $t > 4$ 时, 当 $x = 2$ 时, 函数有最大值, $\therefore -4 + 4t = 10$, $\therefore t = \frac{7}{2}$ (舍);

③ 当 $\frac{t}{2} < -4$, 即 $t < -8$ 时, 当 $x = -4$ 时, 函数有最大值, $\therefore -16 - 2t = 10$, $\therefore t = -13$.

综上所述, t 的值为 $-4 + 2\sqrt{14}$ 或 -13 .

(3) $\because a + b + c = 0, a > 2b > 3c, \therefore a > 0, c < 0, b = -(a + c)$.

设 M, N 的横坐标分别为 m, n . 令 $ax^2 + bx + c = -bx - 2c, \therefore ax^2 + 2bx + 3c = 0, \therefore m + n = -\frac{2b}{a}, mn = \frac{3c}{a}$. 设 MN 在 x 轴上的“影长”为 l ,

$\therefore l^2 = (m - n)^2 = (m + n)^2 - 4mn = \left(-\frac{2b}{a}\right)^2 - 4 \times$

$\frac{3c}{a} = 4\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a} + 4$.

$\because a > 2b = -2(a + c), \therefore \frac{c}{a} > -\frac{3}{2}. \because b \neq 0,$

$\therefore a + c \neq 0, \therefore \frac{c}{a} > -\frac{3}{2}$ 且 $\frac{c}{a} \neq -1. \therefore 2b =$

$-2(a + c) > 3c, \therefore \frac{c}{a} < -\frac{2}{5}, \therefore -\frac{3}{2} < \frac{c}{a} < -\frac{2}{5}$ 且

$\frac{c}{a} \neq -1. \therefore l^2 = 4\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a} + 4 = 4\left(\frac{c}{a} -$

$\frac{1}{2}\right)^2 + 3, \therefore \frac{2\sqrt{39}}{5} < l < \sqrt{19}$ 且 $l \neq 2\sqrt{3}$.

4. C 【解析】如图所示, 连接 DF , 延长 BA 交 DF 于点 M , 则易得 $AM \perp DF, BM = CD = FE$.
 $\because GH \parallel DF, \therefore \triangle ADF \sim \triangle AHG$. 又 $\because AB \perp GH, AM \perp DF, \therefore \frac{GH}{FD} = \frac{AB}{AM}$, 即 $GH = \frac{AB \cdot FD}{AM}$. $\therefore$ 当人从点 C 走向点 E 时, DF, AB 的长不变, AM 的长也不变, $\therefore GH$ 的长不变. 故选 C.

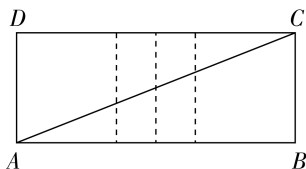
5. C 【解析】综合三视图可知, 这个几何体的底层有 $3 + 1 = 4$ (个) 小正方体, 第二层有 1 个小正方体, 故搭成这个几何体所用的小正方体的个数是 $4 + 1 = 5$. 故选 C.

6. C 【解析】由主视图和左视图可知, ①②③⑤⑥都有可能. ④不符合题意的原因是主视图、左视图上面的矩形中应该有虚线. 故选 C.

7. 圆锥 【解析】由题意可知该几何体是圆锥. 故答案为圆锥.

8. $28\pi \text{ m}^2$ 【解析】根据题意得 $AE = 6, BD = 1.5, AB = 6, AE \parallel BD, \therefore \triangle CBD \sim \triangle CAE$,
 $\therefore \frac{CB}{CA} = \frac{BD}{AE}$, 即 $\frac{CB}{CB + 6} = \frac{1.5}{6}, \therefore CB = 2, \therefore AC = 8$,
 $\therefore$ 小明以 6 m 为半径绕电线杆 AE 走一圈, 他在路灯下的影子 BC 扫过的面积为 $\pi \times 8^2 - \pi \times 6^2 = 28\pi$ (m^2).

9. $3\sqrt{5}$ 【解析】 $\because$ 等腰直角三角形底边上的高为 1, $\therefore$ 其底边长为 2, 腰长为 $\sqrt{2}$. 如图, $AB = 8 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} - 2 = 6, BC = 3, \therefore$ 需要走的最短路程为 $AC = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$. 故答案为 $3\sqrt{5}$.

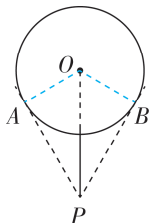


10. 【解】根据该几何体的三视图可知, 该几何体下面是长为 30 cm, 宽为 25 cm, 高为 40 cm 的长方体, 上面是底面直径为 20 cm, 高为

中考新考向备训

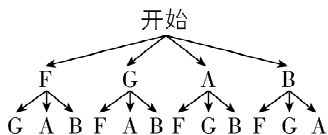
刷考向

1. **B** 【解析】连接 OA, OB , 如图所示.
 $\because PA, PB$ 分别与 $\odot O$ 相切于点 A, B ,
 $\therefore \angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$. $\because \angle APB = 60^\circ$, 四边形 $APBO$ 的内角和为 360° ,
 $\therefore \angle AOB = 120^\circ$. $\because \odot O$ 的半径为
 9 cm , $\therefore \widehat{AB}$ 的长为 $\frac{120\pi \times 9}{180} = 6\pi(\text{cm})$.



2. **135** 【解析】 $\because$ 正八边形的每一个内角都相等, 正八边形的内角和为 $(8-2) \times 180^\circ = 6 \times 180^\circ = 1080^\circ$, $\therefore$ 正八边形的每个内角为 $1080^\circ \div 8 = 135^\circ$. 故答案为 135.
3. **B** 【解析】 $(+1) \times 2 + (-2) = 2 - 2 = 0$.
4. **B** 【解析】A、C、D 选项中的图标都不能找到这样的一条直线, 使图形沿一条直线折叠, 直线两旁的部分能够互相重合, 所以不是轴对称图形; B 选项中的图标能找到这样的一条直线, 使图形沿一条直线折叠, 直线两旁的部分能够互相重合, 所以是轴对称图形. 故选 B.
5. **C** 【解析】 $\because$ 红色颜料质量为 6 g , 黄色颜料质量为 4 g , $\therefore$ 调配出的颜料总质量为 $6+4=10(\text{g})$, $\therefore$ 红色颜料的占比为 $\frac{6}{10} \times 100\% = 60\%$. $\because 50\% < 60\% < 75\%$, $\therefore$ 调配出的颜色属于③类.
6. **D** 【解析】由题知, 第 1 种化合物的化学式为 CH_4 , 第 2 种化合物的化学式为 C_2H_6 , 第 3 种化合物的化学式为 C_3H_8 , $\dots$, 所以第 n 种化合物的化学式为 $\text{C}_n\text{H}_{2n+2}$, 所以第 2 026 种化合物的化学式为 $\text{C}_{2\,026}\text{H}_{4\,054}$. 故选 D.

7. $\frac{1}{2}$ 【解析】画树状图如下:



由树状图可知等可能出现的情况共 12 种, 符合题意的情况有 6 种, $\therefore$ 发出的声音构成二度音程的概率为 $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

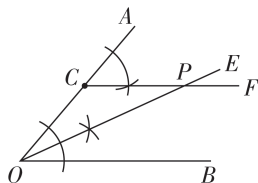
8. **4(答案不唯一)** 【解析】 $\because \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$, $\therefore 2 < \sqrt{7} < 3$. $\because \sqrt{25} < \sqrt{29} < \sqrt{36}$, $\therefore 5 < \sqrt{29} < 6$. $\because \sqrt{7} < n < \sqrt{29}$, $\therefore$ 整数 n 的值可以是 4, 故答案为 4 (答案不唯一).
9. **圆柱(答案不唯一)** 【解析】在一个几何体的主视图、左视图和俯视图中, 至少有一个视图中存在圆, 则这个

几何体可以是圆柱. 故答案为圆柱 (答案不唯一).

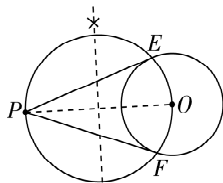
10. **1(答案不唯一)** 【解析】 $\because$ 要使摸出红球的可能性最小, $\therefore$ 红球的个数小于 3. 又 $\because$ 红球的个数是正整数, $\therefore n$ 的值可以为 1. 故答案为 1 (答案不唯一).
11. **1(答案不唯一)** 【解析】 $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k+1}{x}$ 的图象位于第一、第三象限, $\therefore k+1 > 0$, $\therefore k > -1$. 故答案为 1 (答案不唯一).
12. **$OB=OD$ (答案不唯一)** 【解析】添加条件: $OB=OD$. $\because$ 在四边形 $ABCD$ 中, $OA=OC$, $OB=OD$, $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 (对角线互相平分的四边形是平行四边形). 故答案为 $OB=OD$ (答案不唯一).
13. **29 28** 【解析】设两个自然数的十位上的数字为 a ($1 \leq a \leq 9$, 且 a 为整数), 自然数 m 的个位上的数字为 b ($0 \leq b \leq 9$, 且 b 为整数), 则自然数 n 的个位上的数字为 $9-b$, $\therefore m = 10a+b$, $n = 10a+9-b$,
 $\therefore m+n = (10a+b) + (10a+9-b) = 20a+9$, $mn = (10a+b)(10a+9-b) = 100a^2 + 90a + b(9-b)$. 要使 $m+n=20a+9$ 最小, 需 a 最小, 则当 $a=1$ 时, $m+n$ 的最小值为 $20 \times 1 + 9 = 29$, 此时 $mn = 100 + 90 + b(9-b) = -b^2 + 9b + 190 = -\left(b - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{841}{4}$, $\therefore$ 当 $b=4$ 或 $b=5$ 时, mn 的值最大, 最大值为 $-\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{841}{4} = 210 < 1\,000$, 符合题意. 当 $m > n$ 时, $m-n = (10a+b) - (10a+9-b) = 2b-9 > 0$, 解得 $b > 4.5$, $\therefore 5 \leq b \leq 9$, 且 b 为整数, $\therefore 1 \leq 2b-9 \leq 9$. $\because k^2 = m^2 - n^2$, $\therefore k^2 = (m-n)(m+n) = (2b-9)(20a+9)$. 又 $\because 2b-9$ 为奇数, 且 $1 \leq 2b-9 \leq 9$, $\therefore 2b-9$ 所有可能的取值为 1, 3, 5, 7, 9. ①当 $2b-9=1$, 即 $b=5$ 时, $k^2 = 20a+9$, $mn = (10a+5)(10a+4)$. $\because 1 \leq a \leq 9$, 且 a 为整数, $\therefore$ 当 $a=2$ 时, $k^2 = 49$, 此时正整数 $k=7$, $mn = (10 \times 2 + 5) \times (10 \times 2 + 4) = 600 < 1\,000$, 符合题意; 当 $a=8$ 时, $k^2 = 169$, 此时正整数 $k=13$, $mn = (10 \times 8 + 5) \times (10 \times 8 + 4) = 7\,140 > 1\,000$, 不符合题意, 舍去. ②当 $2b-9=3$, 即 $b=6$ 时, $k^2 = 3(20a+9)$, $mn = (10a+6)(10a+3)$, 同理可得没有符合条件的 a , 使得正整数 k 满足 $k^2 = 3(20a+9)$. ③当 $2b-9=5$, 即 $b=7$ 时, $k^2 = 5(20a+9)$, $mn = (10a+7)(10a+2)$, 同理可得没有符合条件的 a , 使得正整数 k 满足 $k^2 = 5(20a+9)$. ④当 $2b-9=7$, 即 $b=8$ 时, $k^2 = 7(20a+9)$, $mn = (10a+8)(10a+1)$, 同理可得没有符合条件的 a , 使得正整数 k 满足 $k^2 = 7(20a+9)$. ⑤当 $2b-9=9$, 即 $b=9$ 时, $k^2 =$

$9(20a+9)$, $mn = 10a(10a+9)$, 当 $a = 2$ 时, $k^2 = 9 \times (20 \times 2 + 9) = 441 = 21^2$, 此时正整数 $k = 21$, $mn = 10 \times 2 \times (10 \times 2 + 9) = 580 < 1\,000$, 符合题意; 当 $a = 8$ 时, $k^2 = 9 \times (20 \times 8 + 9) = 1\,521 = 39^2$, 此时正整数 $k = 39$, $mn = 10 \times 8 \times (10 \times 8 + 9) = 7\,120 > 1\,000$, 不符合题意, 舍去. 综上, 满足条件的所有 k 的值为 7 和 21, 它们的和为 $7 + 21 = 28$. 故答案为 29, 28.

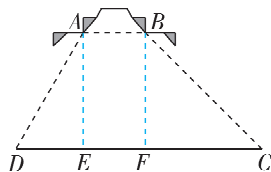
14. 【解】如图, 点 P 即为所求. (作法不唯一)



15. 【解】如图, PE, PF 即为所求.



16. 【解】如图, 过点 A 作 $AE \perp CD$, 垂足为 E , 过点 B 作 $BF \perp CD$, 垂足为 F ,



$\therefore$ 四边形 $AEFB$ 为矩形, $\therefore AE = BF, AB = EF$.

在 $\text{Rt} \triangle ADE$ 中, $AD = 6$ 米, $\angle D = 60^\circ$, $\therefore BF = AE = AD \cdot \sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (米), $DE = AD \cdot \cos 60^\circ = 6 \times \frac{1}{2} = 3$ (米).

在 $\text{Rt} \triangle BCF$ 中, $\angle C = 45^\circ$, $\therefore CF = \frac{BF}{\tan 45^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{1} = 3\sqrt{3}$ (米).

$\therefore CD = 11$ 米, $\therefore AB = EF = CD - DE - CF = 11 - 3 - 3\sqrt{3} \approx 2.8$ (米).

答: 该藻井中间层菱形井对角线 AB 的长约为 2.8 米.

期末综合测试

刷速度

1. **A** 【解析】A 选项, 检测“神舟十六号”载人飞船零件的质量, 适宜采用全面调查的方式, 故 A 选项符合题意; B 选项, 检测一批 LED 灯的使用寿命, 适宜采用抽样调查的方式, 故 B 选项不符合题意; C 选项, 检测黄冈、孝感、咸宁三市的空气质量, 适宜采用抽样调查的方式, 故 C 选项不符合题意; D 选项, 检测一批家用汽车的抗撞击能力, 适宜采用抽样调查的方式, 故 D 选项不符合题意. 故选 A.

2. **C** 【解析】设小正方形的边长为 1. 在 $\text{Rt} \triangle BEC$ 中, $BC = \sqrt{BE^2 + CE^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. $\because AD \perp BC$, $\therefore \angle ABD + \angle BAD = 90^\circ$. $\because \angle ABD + \angle CBE = 90^\circ$, $\therefore \angle BAD = \angle CBE$, $\therefore \sin \angle BAD = \sin \angle CBE = \frac{3}{5}$. 故选 C.

3. **D** 【解析】 $\because$ 两个相似三角形的面积比为 $1:2$, $\therefore$ 两个相似三角形的相似比为 $1:\sqrt{2}$, $\therefore$ 它们的对应角平分线的比为 $1:\sqrt{2}$. 故选 D.

关键点拨

本题主要考查的是相似三角形的性质, 根据相似三角形面积的比等于相似比的平方, 即可得到两个三角形的相似比, 而相似三角形的对应角平分线的比等于相似比, 由此得解.

4. **C** 【解析】 $x = 0$ 时, 两个函数的函数值 $y = b$, $\therefore$ 两

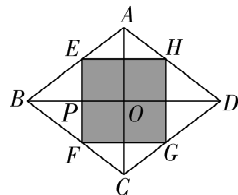
个函数图象与 y 轴相交于同一点, 故 B, D 选项错误; 由 A, C 选项可知, 抛物线开口向上, $\therefore a > 0$, $\therefore$ 直线 $y = ax + b$ 经过第一、三象限, $\therefore$ A 选项错误, C 选项正确. 故选 C.

5. **B** 【解析】A 选项, 根据统计图可得, 8:00 出发, 驾车用时 50 min, 公交用时约 37 min, 地铁用时约 32 min, 所以最快的出行方式是地铁, A 选项说法不正确, 故 A 不符合题意; B 选项, 根据统计图可得, 地铁出行所用时长受出发时刻影响比较小, 所以 B 选项说法正确, 故 B 符合题意; C 选项, 根据统计图可得, 7:00 出发, 选择公交所用时间约为 32 min, 所以 C 选项说法错误, 故 C 不符合题意; D 选项, 根据统计图可得, 最长时长差出现在 7:30, 时长差约为 $52 - 32 = 20$ (min), 所以 D 选项说法错误, 故 D 不符合题意. 故选 B.

6. **D** 【解析】 $\because AC = 6, BD = 8$,

$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24. \text{ 设}$$

AC, BD 相交于点 O , BO 与 EF 相交于点 P , 如图所示, 易得



$\angle BPE = \angle BOA$. 又 $\because \angle EBP = \angle ABO$, $\therefore \triangle EBP \sim \triangle ABO$, $\therefore \frac{EP}{AO} = \frac{BP}{BO}$. $\because$ 菱形的对角线互相平分,

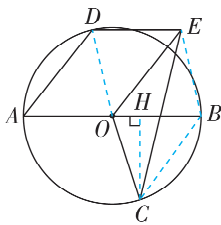
$\therefore AO = \frac{1}{2}AC = 3, BO = \frac{1}{2}BD = 4$. 设正方形的边长为

$2a$, 易得 $EP=PO=a$, $\therefore BP=4-a$, $\therefore \frac{a}{3}=\frac{4-a}{4}$, 解得 $a=\frac{12}{7}$, $\therefore S_{\text{正方形}EFGH}=(2a)^2=\frac{576}{49}$, $\therefore$ 小鸟落在花圃上

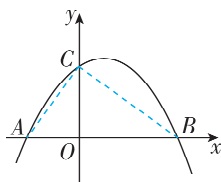
的概率为 $\frac{S_{\text{正方形}EFGH}}{S_{\text{菱形}ABCD}}=\frac{\frac{576}{49}}{\frac{24}{49}}=\frac{576}{24}\times\frac{1}{24}=\frac{24}{49}$. 故选 D.

- 7. D** 【解析】 $\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a<0$) 的对称轴是直线 $x=1$, 抛物线交 x 轴于点 $(m,0)$, $(n,0)$, 其中 $1<m<2$, $\therefore 0<n<1$, 故 A 选项结论正确. $\because$ 关于 x 的方程 $a(x-m)(x-n)=1$ 有实数根, $\therefore$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a<0$) 与直线 $y=1$ 有交点. $\because$ 抛物线开口向下, $\therefore \frac{4ac-b^2}{4a}\geq 1$, $\therefore b^2-4ac\geq -4a$, 故 B 选项结论正确. $\because$ 对称轴为直线 $x=1$, $\therefore -\frac{b}{2a}=1$, 即 $a=-\frac{1}{2}b$. 由题意可知 $x=1$ 时, $y>0$, $\therefore a+b+c>0$, $\therefore \frac{1}{2}b+c>0$, 即 $b+2c>0$, 故 C 选项结论正确. $\because$ 抛物线开口向下, $0<n<1$, $\therefore c<0$, $\therefore$ 对于直线 $y=-\frac{c}{m}x+c$, 函数 y 的值随 x 值的增大而增大. 易知抛物线与直线 $y=-\frac{c}{m}x+c$ 的一个交点为 $(0,c)$, 另一个交点是 $(m,0)$, $\therefore$ 不等式 $ax^2+bx+c<-\frac{c}{m}x+c$ 的解集是 $x<0$ 或 $x>m$, 故 D 选项结论错误. 故选 D.

- 8. C** 【解析】如图, 过 C 作 $CH\perp AB$ 于 H , 连接 BC , BE , OD . $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $AB=10$, $\therefore OC=OB=5$. 在 $\text{Rt}\triangle COH$ 中, $\sin\angle BOC=\frac{CH}{OC}=\frac{24}{25}$, $\therefore CH=\frac{24}{5}$. 根据勾股定理, 得 $OH=\sqrt{OC^2-CH^2}=\frac{7}{5}$, $\therefore BH=BO-OH=\frac{18}{5}$. 根据勾股定理, 得 $BC=\sqrt{BH^2+CH^2}=6$. $\because$ 四边形 $AOED$ 是平行四边形, $\therefore AD=OE$, $AD\parallel OE$, $\therefore \angle A=\angle EOB$. 又 $AO=OB$, $\therefore \triangle AOD\cong\triangle OBE$ (SAS), $\therefore OD=BE=5$, $\therefore CE\leq BC+BE=6+5=11$, $\therefore$ 当 B, C, E 三点共线时, CE 取最大值 11. 故选 C.



- 9. B** 【解析】连接 AC, BC , 如图. $\because$ 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) 是勾股二次函数, $\therefore \angle ACB=90^\circ$, $\therefore \angle ACO+\angle BCO=90^\circ$. $\because \angle BCO+\angle CBO=90^\circ$,



$\therefore \angle ACO=\angle CBO$, $\therefore \text{Rt}\triangle ACO\sim\text{Rt}\triangle CBO$, $\therefore OC:OB=OA:OC$, $\therefore OC^2=OA\cdot OB$, $\therefore$ ①正确. 设 $A(m,0)$, $B(n,0)$, 则 $OA=-m$, $OB=n$. $\because m, n$ 为关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根, $\therefore mn=\frac{c}{a}$. 当 $x=0$ 时, $y=ax^2+bx+c=c$, $\therefore C(0,c)$, $\therefore OC=c$. $\because OC^2=OA\cdot OB$, $\therefore c^2=-mn$, $\therefore c^2=-\frac{c}{a}$, $\therefore ac=-1$, $\therefore$ ②不正确. 当 $AB=4OA$ 时, $n=-3m$. $\because m+n=-\frac{b}{a}$, $mn=\frac{c}{a}$, $\therefore m-3m=-\frac{b}{a}$, $-3m^2=\frac{c}{a}$, 解得 $m=\frac{b}{2a}$, $m^2=-\frac{c}{3a}$, $\therefore \left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{3a}$, $\therefore b^2=-\frac{4}{3}ac$. $\because ac=-1$, $\therefore b^2=\frac{4}{3}$, $\therefore$ ③正确. 若该函数图象的对称轴为直线 $x=1$, 则 $-\frac{b}{2a}=1$, $\therefore b=-2a$, $\therefore bc=-2ac$. $\because ac=-1$, $\therefore bc=2$, $\therefore$ ④正确. 故选 B.

- 10. B** 【解析】由翻折的性质可得 $DG=OG=AG$, $AE=OE=BE$, $OC=BC$, $\angle DGF=\angle FGO$, $\angle AGE=\angle OGE$, $\angle AEG=\angle OEG$, $\angle OEC=\angle BEC$, $\therefore$ 易得 $\angle FGE=\angle FGO+\angle OGE=90^\circ$, $\angle GEC=\angle OEG+\angle OEC=90^\circ$, $\therefore \angle FGE+\angle GEC=180^\circ$, $\therefore GF\parallel CE$, 故①正确; 设 $AD=2a$, $AB=2b$, 则 $OC=BC=AD=2a$, $DG=OG=AG=a$, $AE=OE=BE=b$, $\therefore CG=OG+OC=3a$, 在 $\text{Rt}\triangle CGE$ 中, $CG^2=GE^2+CE^2$, 即 $(3a)^2=a^2+b^2+b^2+(2a)^2$, 解得 $b=\sqrt{2}a$, $\therefore AB=\sqrt{2}AD$, 故②错误; 在 $\text{Rt}\triangle COF$ 中, 设 $OF=DF=x$, 则 $CF=2b-x=2\sqrt{2}a-x$, $\therefore x^2+(2a)^2=(2\sqrt{2}a-x)^2$, 解得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}a$, $\therefore \sqrt{6}DF=\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=\sqrt{3}a$, 在 $\text{Rt}\triangle AGE$ 中, $GE=\sqrt{AG^2+AE^2}=\sqrt{3}a$, $\therefore GE=\sqrt{6}DF$, 故③正确; $\because OF=x=\frac{\sqrt{2}}{2}a$, $OC=2a$, $\therefore OC=2\sqrt{2}OF$, 故④正确; 无法证明 $\angle FCO=\angle GCE$, $\therefore$ 无法证明 $\triangle COF\sim\triangle CEG$, 故⑤错误. 综上, 正确的是 ①③④. 故选 B.

- 11. 44** 【解析】 $\because a:b:c=2:3:4$, $\therefore$ 可设 $a=2k$, $b=3k$, $c=4k$, 其中 $k\neq 0$. $\because a+b+c=36$, $\therefore 2k+3k+4k=36$, 解得 $k=4$, $\therefore a=8$, $b=12$, $c=16$, $\therefore 2a-3b+4c=16-36+64=-20+64=44$, 故答案为 44.

- 12. 8** 【解析】令 $y=0$, 则 $-\frac{9}{80}(x-8)(x+2)=0$, 解得 $x=8$ 或 $x=-2$ (舍去), $\therefore OA=8$ m. 故答案为 8.

- 13. $5\sqrt{2}$** 【解析】如图, 在 BC 上取点 G , 使 $CG=1$.

$$\because BC=9, CM=3, \therefore \frac{CG}{CM} =$$

$$\frac{CM}{BC} = \frac{1}{3}. \text{ 又} \because \angle MCG =$$

$$\angle MCB, \therefore \triangle MCG \sim$$

$$\triangle BCM, \therefore \frac{MG}{BM} = \frac{CG}{CM} = \frac{1}{3}, \therefore MG = \frac{1}{3}BM, \therefore AM +$$

$$\frac{1}{3}BM = AM + MG \geq AG. \therefore AG = \sqrt{AC^2 + CG^2} =$$

$$\sqrt{7^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}, \therefore AM + \frac{1}{3}BM \geq 5\sqrt{2}, \text{ 即当 } M \text{ 在 } AG$$

$$\text{上时, } AM + \frac{1}{3}BM \text{ 取最小值, 为 } 5\sqrt{2}. \text{ 故答案为 } 5\sqrt{2}.$$

14. $\frac{5\sqrt{3}}{11} \cdot \frac{1}{7}$ 【解析】如图, 过点 A 作

$AE \perp BC$ 于点 E, 过点 B 作 $BF \perp AC$

于点 F. 设 $CE=x$, 则 $BE=5-x$, 则

$$AE^2 = 8^2 - x^2 = 7^2 - (5-x)^2, \text{ 解得 } x =$$

$$4, \therefore CE=4, \text{ 则 } \cos C = \frac{CE}{AC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle C = 60^\circ, \therefore AE = AC \cdot \sin C = 8 \sin 60^\circ = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$4\sqrt{3}. \therefore BE = BC - EC = 1, \therefore \cos \angle ABC = \frac{BE}{AB} = \frac{1}{7}.$$

$$\text{又} \because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AE = \frac{1}{2} \times AC \times BF, \therefore BF =$$

$$\frac{BC \times AE}{AC} = \frac{5 \times 4\sqrt{3}}{8} = \frac{5\sqrt{3}}{2}. \text{ 在 Rt} \triangle ABF \text{ 中, } AF =$$

$$\sqrt{AB^2 - BF^2} = \sqrt{7^2 - \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{11}{2}, \therefore \tan \angle BAF =$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{11}$$

$$\frac{BF}{AF} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\frac{11}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{11}. \text{ 故答案为 } \frac{5\sqrt{3}}{11}, \frac{1}{7}.$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{11}$$

15. $2\sqrt{10}$ 【解析】如图, 作

$DE \perp AB$ 于点 E, 则 $\angle DEA =$

$\angle DEB = 90^\circ. \because \angle ACB =$

$90^\circ, BD=5, CD=3, \therefore DC \perp$

$AC, BC=BD+CD=5+3=8. \because$ 点 P 是 $\triangle ABC$ 的内心,

$\therefore AD$ 平分 $\angle CAB, \therefore DE=DC=3. \text{ 又} \because AD=AD,$

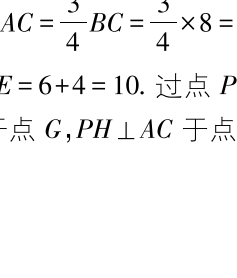
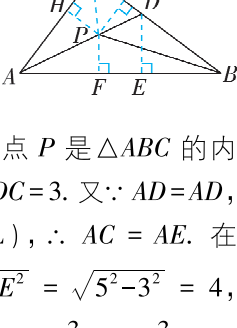
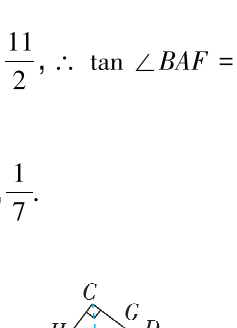
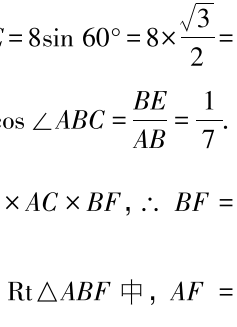
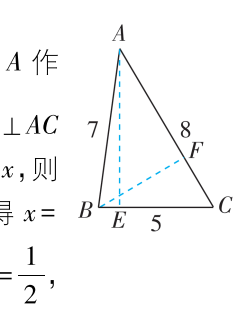
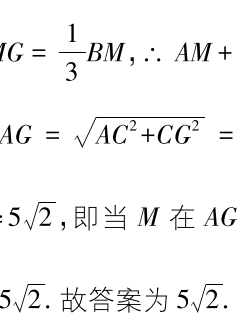
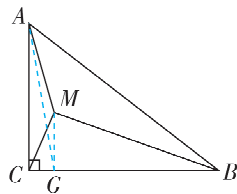
$\therefore \text{Rt} \triangle ACD \cong \text{Rt} \triangle AED \text{ (HL)}, \therefore AC=AE. \text{ 在}$

$\text{Rt} \triangle BDE$ 中, $BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$

$\therefore \tan \angle ABC = \frac{DE}{BE} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}, \therefore AC = \frac{3}{4}BC = \frac{3}{4} \times 8 =$

$6, \therefore AE=AC=6, \therefore AB=AE+BE=6+4=10. \text{ 过点 } P$

作 $PF \perp AB$ 于点 F, $PG \perp BC$ 于点 G, $PH \perp AC$ 于点



H, 连接 PC. $\because P$ 是 $\triangle ABC$ 的内心, $\therefore PF=PG=$

PH . 设 $PF=PG=PH=r. \because S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PAC} =$

$S_{\triangle ABC}, \therefore \frac{1}{2} \times 10r + \frac{1}{2} \times 8r + \frac{1}{2} \times 6r = \frac{1}{2} \times 6 \times 8, \text{ 解得 } r =$

$2, \therefore PG=PH=PF=2. \text{ 又} \because \angle ACB = \angle PGC =$

$\angle PHC = 90^\circ, \therefore$ 四边形 $PGCH$ 是正方形, $\therefore CG=2,$

$\therefore BG=BC-CG=8-2=6, \therefore$ 在 $\text{Rt} \triangle BGP$ 中, $BP =$

$\sqrt{BG^2 + PG^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}. \text{ 故答案为 } 2\sqrt{10}.$

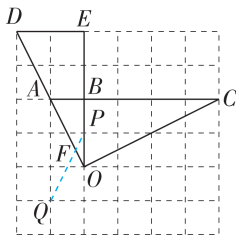
16. 【解】 $(-1)^{2025} + |\sqrt{3}-2| + 2\sin 60^\circ - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1 +$

$$(2-\sqrt{3}) + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = -1 + 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + 2 = 1 + 2 = 3.$$

17. 【解】(1) 如图所示, $\triangle OBC$ 即为所求.

(2) 如图所示, $\triangle ODE$ 即为所求.

(3) 如图所示, 取格点 P, Q, 连接 PQ, 交 AO 于点 F, 则 F



即为所求作的点. 易知 $\triangle AQF \sim \triangle OPF, \therefore \frac{AF}{FO} =$

$$\frac{AQ}{OP} = 3.$$

18. (1) 【解】①若 D 是 AB 的中点, $DE \parallel BC$, 则 E 是 AC

的中点, 是真命题, 故符合题意; ②若 $DE \parallel BC$,

$DE = \frac{1}{2}BC$, 则 D, E 分别是 AB, AC 的中点, 是真命

题, 故符合题意; ③若 D 是 AB 的中点, $DE = \frac{1}{2}BC$,

则 E 不一定是 AC 的中点.

如图, D 是 AB 的中点, 分别以

B, C 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}BC$ 的长为

半径画弧, 分别交于点 M, N, 作

直线 MN 交 BC 于点 F, 以 D 为

圆心, BF 长为半径画弧, 交 AC

于点 E, 则 $DE=BF=\frac{1}{2}BC$, 但 E 显然不是 AC 的中

点, 是假命题, 故不符合题意. 真命题为①②. 故答

案为①②.

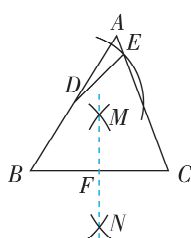
(2) 【证明】(选择一个进行证明即可) ① $\because$ 点 D 是

AB 的中点, $\therefore \frac{AD}{DB} = 1. \because DE \parallel BC, \therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = 1,$

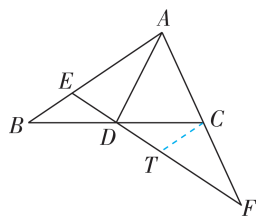
$\therefore AE=CE$, 即 E 是 AC 的中点.

② $\because DE = \frac{1}{2}BC, \therefore \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}. \because DE \parallel BC, \therefore \angle ADE =$

$\angle B, \angle AED = \angle C, \therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC, \therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} =$

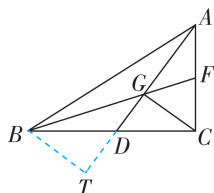


$\therefore BE = CT. \because CT \parallel AE,$
 $\therefore \angle FCT = \angle BAF, \angle FTC =$
 $\angle FEA, \therefore \triangle FCT \sim \triangle FAE,$
 $\therefore \frac{CF}{AF} = \frac{CT}{AE} = \frac{BE}{AE}, \therefore \frac{AB}{AE} + \frac{AC}{AF} =$
 $\frac{AE+EB}{AE} + \frac{AF-CF}{AF} = 1 + \frac{EB}{AE} +$
 $1 - \frac{CF}{AF} = 2.$



图(1)

(2) 如图(2), 过点 B 作 $BT \perp$
 AD 交 AD 的延长线于点 T , 设
 $DG = x, AG = y. \because \angle CGD = 90^\circ,$
 $\therefore \angle CGA = 90^\circ, \therefore \angle ACG +$
 $\angle CAG = 90^\circ. \because \angle ACD = 90^\circ,$
 $\therefore \angle DCG + \angle ACG = 90^\circ,$



图(2)

$\therefore \angle DCG = \angle CAG, \therefore \triangle CGD \sim \triangle AGC, \therefore \frac{GD}{GC} = \frac{CG}{AG},$
 $\therefore CG = \sqrt{xy}. \because BT \perp AT, \therefore \angle T = \angle CGD = 90^\circ.$
 $\because \angle BDT = \angle CDG, BD = DC, \therefore \triangle BDT \cong \triangle CDG$
 $(AAS), \therefore BT = CG = \sqrt{xy}, DT = DG = x. \therefore \angle CDG =$
 $\angle CDA, \angle DGC = \angle ACD = 90^\circ, \therefore \triangle DCG \sim \triangle DAC,$
 $\therefore \frac{CD}{DA} = \frac{DG}{DC}, \therefore CD^2 = DG \cdot DA, \therefore BD^2 = DG \cdot DA,$
 $\therefore \frac{BD}{DG} = \frac{DA}{BD}. \text{ 又 } \because \angle BDG = \angle ADB, \therefore \triangle BDG \sim$
 $\triangle ADB, \therefore \angle DBG = \angle BAD, \therefore \tan \angle BAT =$
 $\tan \angle FBC = \frac{BT}{AT} = \frac{\sqrt{xy}}{7}, \therefore \frac{\sqrt{xy}}{2x+y} = \frac{\sqrt{6}}{7}, \text{ 整理得 } 24x^2 -$
 $25xy + 6y^2 = 0, \therefore (3x-2y)(8x-3y) = 0, \therefore 3x-2y=0$
 或 $8x-3y=0, \therefore \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ 或 $\frac{3}{8}, \therefore \frac{DG}{AG}$ 的值为 $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{3}{8}.$

23. 【解】(1) $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ (b, c 为常数) 顶点
 M 的坐标为 $(2, -5), \therefore$ 抛物线的表达式为 $y =$
 $(x-2)^2 - 5 = x^2 - 4x - 1, \therefore b = -4, c = -1.$

(2) $\because$ 点 P 的横坐标为 m , 点 Q 的横坐标为 $2-m,$
 $\therefore y_P = m^2 - 4m - 1, y_Q = (2-m)^2 - 4(2-m) - 1 = m^2 - 5,$
 则 $y_P - y_Q = (m^2 - 4m - 1) - (m^2 - 5) = -4(m-1).$

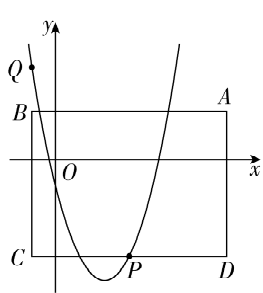
顶点 M 在图象 G 上时, 当点 P 在顶点 M 右侧(包
 括点 M) 时, $m \geq 2, \therefore 2-m \leq 0, m-1 > 0,$ 则点 Q 在顶
 点 M 左侧, $y_P - y_Q = -4(m-1) < 0,$ 此时 $y_P < y_Q,$ 即此
 时图象 G 上最高点的纵坐标为 $y_Q,$ 最低点的纵坐
 标为 $y_M, \therefore d = y_Q - y_M = m^2 - 5 - (-5) = m^2.$

当点 Q 在顶点 M 右侧(包括点 M) 时, $2-m \geq 2,$
 $\therefore m \leq 0, m-1 < 0,$ 则点 P 在顶点 M 左侧, $y_P - y_Q =$
 $-4(m-1) > 0,$ 此时 $y_P > y_Q,$ 即此时图象 G 上最高点的
 纵坐标为 $y_P,$ 最低点的纵坐标为 $y_M, \therefore d = y_P -$

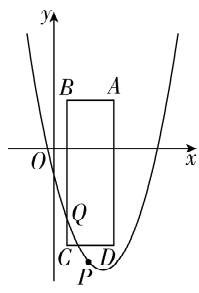
$$y_M = m^2 - 4m - 1 - (-5) = m^2 - 4m + 4.$$

综上, 当 $m \geq 2$ 时, $d = m^2$; 当 $m \leq 0$ 时, $d = m^2 -$
 $4m + 4.$

(3) 对于抛物线 $y = x^2 - 4x - 1$, 当 $y = -4$ 时, $x^2 - 4x -$
 $1 = -4$, 解得 $x_1 = 1, x_2 = 3, \therefore$ 抛物线经过点 $(1,$
 $-4), (3, -4).$ $\because$ 矩形 $ABCD$ 的顶点分别为 $A(3m-2, 2),$
 $B(2-m, 2), C(2-m, -4), \therefore D(3m-2, -4).$
 当 $3m-2 = 2-m$ 时, $m = 1$, 此时点 A, B 重合, 不能构
 成矩形, 不符合题意. 当 $m = 3$ 时, 如图(1), 点
 $P(3, -4)$ 在 CD 上, 此时图象 G 在矩形 $ABCD$ 内部
 的部分所对应的函数值 y 随 x 的增大而减小, 符
 合题意. 当 $m > 3$ 时, 点 P 在 CD 上方, 此时图象 G
 在矩形 $ABCD$ 内部的部分所对应的函数值存在 y
 随 x 的增大而增大, 不符合题意.



图(1)

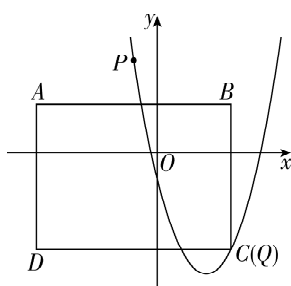


图(2)

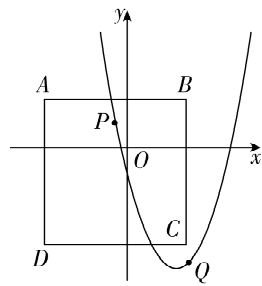
当 $1 < m < 3$ 时, 如图(2), 点 P 在 CD 下方, 点 Q 在
 CD 上方, 此时图象 G 在矩形 $ABCD$ 内部的部分所
 对应的函数值 y 随 x 的增大而减小, 符合题意.

当 $2-m = 3$, 即 $m = -1$ 时, 如图(3), 点 $Q(3, -4)$ 与
 点 C 重合, 此时图象 G 在矩形 $ABCD$ 内部的部分所
 对应的函数值 y 随 x 的增大而减小, 符合题意.

当 $2-m > 3$, 即 $m < -1$ 时, 点 Q 在 CD 上方, 此时图
 象 G 在矩形 $ABCD$ 内部的部分所对应的函数值存
 在 y 随 x 的增大而增大, 不符合题意.



图(3)



图(4)

当 $-1 < m < 1$ 时, 如图(4), 点 P 在 CD 上方, 点 Q 在
 CD 下方, 此时图象 G 在矩形 $ABCD$ 内部的部分所
 对应的函数值 y 随 x 的增大而减小, 符合题意.

综上, 当图象 G 在矩形 $ABCD$ 内部的部分所对应
 的函数值 y 随 x 的增大而减小时, m 的取值范围
 为 $-1 \leq m < 1$ 或 $1 < m \leq 3.$